

SCHWACHE STABILITÄT STOCHASTISCHER DIFFERENTIAL-  
GLEICHUNGEN UND DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ AUF  
LOKALKOMPAKTE GRUPPEN

D i s s e r t a t i o n

Zur Erlangung des Grades

"Doktor

der Naturwissenschaften"

am Fachbereich Mathematik

der Johannes Gutenberg-Universität

in Mainz

Ingo Hucke

geb. in Winnigen

M a i n z 1 9 8 5





Digitized by the Internet Archive  
in 2026





SCHWACHE STABILITÄT STOCHASTISCHER DIFFERENTIAL-  
GLEICHUNGEN UND DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ AUF  
LOKALKOMPAKTE GRUPPEN

D i s s e r t a t i o n

Zur Erlangung des Grades

"Doktor

der Naturwissenschaften"

am Fachbereich Mathematik

der Johannes Gutenberg-Universität

in Mainz

Ingo Hucke

geb. in Winnigen

Mainz 1985

1. Betreuer: Prof. W.J. Bühler Ph. D.

2. Betreuer: Prof. Dr. H.-J. Schuh

Datum der mündlichen Prüfung: 31.10.1985

# INHALTSVERZEICHNIS

|                                                                                                                        | Seite |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Einleitung                                                                                                             | 1     |
| KAPITEL I      Schwache Stabilität stochastischer<br>Differentialgleichungen bei integrierendem<br>Partialsommenprozeß | 9     |
| KAPITEL II     Schwache Stabilität stochastischer<br>Differentialgleichungen im allgemeinen Fall                       | 97    |
| KAPITEL III    Beispiele                                                                                               | 146   |
| § 1   Stochastische Hemigruppen                                                                                        | 146   |
| § 2   Verteilungskonvergenz auf lokalkompakten<br>Moore-Gruppen                                                        | 173   |
| § 3   Ein Problem aus der Kontrolltheorie                                                                              | 194   |
| KAPITEL IV     Verteilungskonvergenz auf lokalkompakten<br>Lie-Gruppen                                                 | 218   |
| Anhang                                                                                                                 | 269   |
| Zusammenfassung                                                                                                        | 285   |
| Literaturverzeichnis                                                                                                   | 287   |



## EINLEITUNG

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Beschäftigung mit dem Verhalten der Verteilung von

$\prod_{j=1}^{k_n} (I + X_{n,j})$ , wo die  $X_{n,j}$  zufällige  $M \times M$  - Matrizen sind.

Während für die Summe  $\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}$  genau beschrieben werden kann, wann

Verteilungskonvergenz vorliegt, ist dies für das obige Produkt nur teilweise der Fall. Die Ursache dafür ist natürlich, daß Produkte von Matrizen nicht vertauschbar sind (zumindest im allgemeinen).

Ein Weg, auf den aber hier nicht näher eingegangen werden soll, sich dem Problem zu nähern, führt über den Logarithmus von linearen Funktionalen des Produktes, indem man so indirekt wieder zu Summen kommt. Allerdings muß man dabei Bedingungen, z.B. Positivität u.A., an die Matrizenelemente stellen, die zum zentralen Grenzwertsatz nicht in direkter Beziehung stehen (siehe [5], [14], [51]).

Der hier beschrittene Weg führt über die Lösung stochastischer Differentialgleichungen. Der Zusammenhang wird sofort klar, wenn man

$Y_n(t) = \prod_{j=1}^{k_n(t)} (I + X_{n,j})$  und  $X_n(t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} X_{n,j}$  ersetzt, so wird

$$dY_n(t) = Y_n(t) - Y_n(t-) = Y_n(t-) (X_n(t) - X_n(t-)) = Y_n(t-) dX_n(t)$$

Statt sich auf die lineare Differentialgleichung zu beschränken, betrachtet man allgemeiner die Verteilungskonvergenz der zu

$$i) \quad Y_n(t) = Y_{n,0} + \int_0^t h_n(s-, X_n(s-), Y_n(s-)) dX_n(s) \quad \text{bzw. zu}$$

$$ii) \quad Y(t) = Y_0 + \int_0^t h_0(s-, X(s-), Y(s-)) dX(s) \quad \text{gehörende Tripel:}$$

$$(Y_{n,0}, X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (Y_0, X, Y).$$

Es zeigt sich, daß die Beweise für den Fall der allgemeineren Differentialgleichung, da die zugrunde liegenden Ideen die gleichen sind, kaum mehr Aufwand erfordern. Einen großen Unterschied macht es hingegen, wenn man die  $Y_{n,j}$  nicht mehr als unabhängig annimmt. Da aber die in Kapitel II gemachte Annahme,  $X_n$  sei ein Semimartingal, die allgemeinste, für  $X_n$  mögliche, ist, rechtfertigt sich damit wohl der Aufwand. ( Zur Konvergenz  $Y_n \xrightarrow{D} Y$  siehe [9], [36], [37], [43], [23], [47], [49], [50] )

Die Aussage " $(Y_{n,0}, X_n, Y_n) \rightarrow (X_0, X, Y)$ " findet natürlich breite Anwendung. Dazu einige Beispiele.

In der Biologie (siehe (35), (38), (39)) werden Bevölkerungswachstum oder ähnliche, insbesondere dichteabhängige Prozesse durch die Lösung einer Differenzengleichung beschrieben, deren Verhalten sich nur schwer kalkulieren läßt. Durch die obige Konvergenzaussage ist es möglich, an ihrer Stelle die Lösung der Differentialgleichung zu betrachten, die, z.B. durch Simulation, berechnet werden kann.

Den entgegengesetzten Weg geht man bei kontrollierten stochastischen Differentialgleichungen (siehe [37], [41], [42], [43], [44] und § 3 in Kapitel III). Oft ist es schwierig, die optimale Kontrolle aus der vorliegenden stochastischen Differentialgleichung zu bestimmen. Ersetzt man diese hingegen durch eine Differenzengleichung, so ist es durch "dynamisches Programmieren" möglich, hierfür die optimale Kontrolle zu berechnen. Die Aussage in Satz III. 3.5 ist nun, daß unter gewissen Voraussetzungen, wenn diese optimalen Kontrollen der Differenzengleichungen konvergieren, der Grenzwert eine optimale Kontrolle der Differentialgleichung ist.

Eine weitere Anwendung ist die Verteilungskonvergenz stochastischer Integrale der Form

$$\int_0^t h_n(s, X_n^1(s-), X_n^2(s-)) dX_n^1(s), \text{ wobei } X_n^1 \text{ und } X_n^2 \text{ Semimartingale}$$

sind (siehe [48], [50]). Man schreibt nämlich einfach in  $2M \times 2M$ -Matrizen:



$$\begin{pmatrix} y_n^1(t) & 0 \\ 0 & y_n^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_n(s-, x_n^1(s-), y_n^1(s-)) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot d \begin{pmatrix} x_n^1(s) & 0 \\ 0 & x_n^2(s) \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist auch das ursprüngliche Problem der Verteilungskonvergenz

$\prod_{j=1}^{k_n} (I + X_{n,j})$  gelöst. Das läßt sich direkt anwenden auf Produkte von

Matrizen, die in einer Gruppe liegen, also falls alle  $I + X_{n,j}$  unitäre (orthogonale, affine usw.) Abbildungen sind schreibt man etwas allgemeiner

$\prod_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (I + X_{n,j})$ , so wird deutlich, daß es sich eigentlich um die

Konvergenz zufälliger Halbgruppen handelt (siehe [46], [47]). Auf diesen Punkt wird in Kap. III, § 1 näher eingegangen.

Selbstverständlich hat man damit auch eine Aussage für den Fall nicht zufälliger  $X_{n,j}$ , d.h. einen Konvergenzatz für Operator-Halbgruppen. Zu diesem Problem der Approximation von Operator-Halbgruppen gibt es eine sehr umfangreiche (funktionalanalytische) Literatur, die aber auf die spezifischen Fragestellungen in der Stochastik, insbesondere der Verteilungskonvergenz auf lokalkompakten Gruppen, nur bedingt Anwendung findet. Hier erscheinen nun zwei Methoden gut geeignet zu sein:

Zum Ersten kann an die Wahrscheinlichkeitsoperatoren betrachten, was in Kap. IV geschieht, zum Zweiten die Fourier-Transformierten, was in Kap. III, § 2 getan wird und in engen Zusammenhang mit Matrizenprodukten steht. Sind nämlich die  $G_{n,j}$  unabhängige Zufallsvariable mit Werten in einer lokalkompakten Gruppe  $G$  und  $U$  eine unitäre, endlichdimensionale Darstellung von  $G$ , so ist

$$E U \left( \prod_{j=1}^{k_n} G_{n,j} \right) = \prod_{j=1}^{k_n} (I + (E U (G_{n,j}) - I)) \text{ die Fourier-Transformierte}$$

Verteilung von  $\prod_{j=1}^{k_n} G_{n,j}$  "im Punkt  $U$ ".

Nun zurück zur Stabilität der Gleichungen i).

Welche Voraussetzungen sind von vorneherein plausibel, wenn man

$Y_n \rightarrow Y$  nachweisen will ?  
D

Für  $h_n$ : Da im Argument Zufallsvariable stehen, sollte man fordern, daß die  $(h_n)_{n \geq 0}$  eine gemeinsame, globale Lipschitz-Konstante haben und daß die Aussage

$$"(t_n, x_n, y_n) \rightarrow (t, x, y) \Rightarrow h_n(t_n, x_n, y_n) \rightarrow h_0(t, x, y)$$

gilt.

Für  $X_n$ : Es sollten Bedingungen gelten, die für " $X_n \rightarrow X$ " und " $X$  ist ein

Semimartingal" sorgen; letzteres, damit ii) überhaupt erst sinnvoll wird.

Für  $X_{n,0}$ : Man muß garantieren, daß  $(Y_{n,0}, X_n) \rightarrow (Y_0, X)$  gilt.  
D

Dies sind genau die Voraussetzungen, die man in den Hauptsätzen von Kapitel I und II, in Satz I. 9 und I. 13 bzw. Satz II. 10 macht. In Folgerung I. 11 und II. 13 wird außerdem gezeigt, daß die Forderungen an  $X_n$  in bestimmten Situationen nicht nur hinreichend sondern auch notwendig für " $X_n \rightarrow X$ " sind.

In Kapitel I wird vorausgesetzt, daß  $X_n(t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} X_{n,j}$  ein Partialsummenprozeß ist.

Der Konvergenzbeweis verläuft wie üblich: Man zeigt die Straffheit der Verteilungen der Prozesse und die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen. Natürlich beginnen die Schwierigkeiten bei der Durchführung des Beweises. Dabei wird ausgenutzt, daß sich wegen der Form von  $X_n$  das Integral in i) zu einer Summe vereinfacht, also:



$$\text{iii)} \quad Y_n(t) = Y_{n,0} + \sum_{j=1}^{k_n(t)} h_n(T_{n,j-1}, X_n(T_{n,j-1}), Y_n(T_{n,j-1})) \cdot X_{n,j}$$

Mit einer technischen Voraussetzung, der allgemeine Fall läßt sich darauf reduzieren, und einem Satz aus [40] weist man die Straffheit nach. Um die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen zu zeigen, approximiert man iii) durch einen Polygonzug, man setzt

$$Y_{n,m}(0) := Y_{n,0} \text{ und für } t_{m,i-1} \leq t < t_{m,i}$$

$$Y_{n,m}(t) := Y_{n,m}(t_{m,i-1}) + h_n(t_{m,i-1}, X_n(t_{m,i-1}), Y_{n,m}(t_{m,i-1})) \cdot (X_n(t) - X_n(t_{m,i-1})), \text{ wo}$$

$0 = t_{m,0} < \dots < t_{m,q_m} = T$  eine Zerlegung von  $[0, T]$  ist.

Es läßt sich leicht zeigen, daß für festes  $m$  der Prozeß  $Y_{n,m}$  gegen einen stochastisch stetigen Prozeß  $Y_m$  konvergiert, wenn  $X_n$  sich ebenso verhält.

Der Beweis von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\|Y_n(t) - Y_{n,m}(t)\| > \epsilon) = 0 \forall \epsilon > 0$ ,

woraus man sofort die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen folgert, ist leider mit sehr großem Aufwand verbunden.

In Kapitel II setzt man für  $X_n$  nur voraus, ein Semimartingal zu sein, eine notwendige Forderung, um überhaupt ein stochastisches Integral bzgl.  $X_n$  definieren zu können.

Beim Nachweis der Konvergenz zieht man sich auf den in Kapitel I behandelten Fall zurück, indem man durch die Wahl geeigneter Stoppzeiten  $T_{n,j}$  den Prozeß  $X_n$  und seine lokalen Charakteristiken durch den Prozeß

$$\sum_{j \geq 0} (X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})) \cdot 1_{\{t \geq T_{n,j+1}\}}$$

und die entsprechenden Größen beliebig genau approximiert; damit liegt

aber auch die Lösung von iii) beliebig nahe an der von i). Daraus folgert man nun leicht die Konvergenzaussagen. Jeweils am Ende von Kapitel I und II werden einige illustrierende Beispiele dargestellt.

In Kapitel III nun werden mit den bisherigen Ergebnissen etwas komplexere Probleme behandelt.

In § 1 geht es zunächst um die Konvergenz stochastischer Hemigruppen (siehe [10] eine Familie  $\{ T(s,t) \mid 0 \leq s \leq t \}$  von Operatoren auf einem Banachraum als Hemigruppe, wenn

$$\text{iv) } T(s,s) = I \quad \forall s, \quad T(s,r) T(r,t) = T(s,t) \quad \forall s \leq r \leq t$$

gilt; weiterhin setzt man nicht die Stetigkeit sondern nur, daß  $T$  in beiden Argumenten "cadlag" ist, voraus. Es ergibt sich dann nämlich, daß man genau die Lösungen  $Y(s,t)$  von stochastischer Differentialgleichungen der Form

$$\text{v) } Y(s,t) = I + \int_s^t Y(s,\tau^-) dX(\tau)$$

als zufällige Operator-Hemigruppen erhält, deren Verteilungskonvergenz man im Rahmen von Kapitel II behandeln kann (Folgerung III. 1.4).

Weitere Ergebnisse erhält man für transformierte Semimartingale und für (deterministische) Prozesse von beschränkter Variation (Satz III. 1.5 und Folgerung III. 1.8).

In § 2 geht es um die Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer lokalkompakten Gruppe  $G$ . Dabei definiert man eine Hemigruppe

$\{ \mu(s,t) \mid 0 \leq s \leq t \}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $G$  wie in iv) mit  $\delta_e$  statt  $I$  und der Faltung an Stelle der Multiplikation (bzw. Komposition). Die schon vorher erwähnten Fourier-Transformierten  $\{ \int U(g) \mu(s,t)(dg) \mid 0 \leq s \leq t \}$  "an der Stelle  $U$ " bilden dann eine Operator-Hemigruppe.

Man weist nun die Konvergenz von  $(\mu_n(s,t))_n$  nach, indem man mit den Hilfsmitteln aus § 1 die Konvergenz von  $(\int U(g) \mu_n(s,t)(dg))_n$

zeigt und durch Betrachten eines multiplikativen Integrals nachweist, daß die Grenzfunktion "in U stetig" ist (Satz III. 2.5). Daraus ergibt sich ein zentraler Grenzwertsatz für unabhängige G-wertige Zufallsvariablen und sogar für "Martingal-Differenzen".

Da man nur endlichdimensionale Darstellungen mit den bisherigen Hilfsmitteln behandeln kann, muß man sich auf Moore-Gruppen beschränken, zu denen aber immerhin die kompakten Gruppen gehören. Andererseits ist jede Moore-Gruppe Lie-projektiv, d.h. für sie gelten die Aussagen von Satz IV. Unter Umständen sind aber die Voraussetzungen für diesen Satz, wenn man ein konkretes Problem betrachtet, wegen ihrer allgemeinen Form, schwieriger zu verifizieren als die Bedingungen in § 2.

Ein Problem aus der Kontrolltheorie (siehe [41], [42], [43], [37]) wird in § 3 behandelt. Es geht um eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} \text{vi)} \quad Y(t) = Y_0 + \int_0^t h_1(s, Y(s), u(s, Y(s))) ds + \\ + \int_0^t h_2(s, Y(s)) dB(s) \end{aligned}$$

wobei B eine Standard Brown'sche Bewegung ist und u eine Borel-Funktion. Zum Einen ist u nicht Lipschitz-stetig und zum Anderen ergibt sich bei der Approximation von vi) durch Differenzengleichungen als (einigermaßen) realistische Forderung an die Konvergenz der  $u_n$ , daß  $\{ (t,x) \mid u_n(t,x) \neq u(t,x) \}$  das Lebesgue-Maß Null hat.

Somit sind bei den oben erwähnten Voraussetzungen diejenigen für  $h_n$  beide nicht erfüllt. Die besondere Form von i), speziell des Semimartingals, sorgt dafür, daß man dennoch die Verteilungskonvergenz von  $Y_n$  nachweisen kann. Es ergibt sich das schon vorher erwähnte Ergebnis, daß u eine optimale Kontrolle für vi) ist, wenn die  $u_n$  dies für die approximierenden Differenzgleichungen sind und die Konvergenz  $u_n \rightarrow u$  fast überall erfolgt.

In Kapitel IV benutzt man, um die Konvergenz von (Faltungs-)Hemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen nachzuweisen, die Methode der Wahrscheinlichkeitsoperatoren: Für das Maß  $\mu$  auf  $G$  ist der zugehörige Operator  $T_\mu(f)(x) := \int f(xy) \mu(dy)$ , d.h.  $T_\mu$  bildet den Raum der stetigen, beschränkten und reellwertigen Funktionen auf  $G$  in sich selbst ab, dabei geht die Faltung von Maßen über in das Produkt der zugehörigen Operatoren, d.h. zu einer Hemigruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen gehört eine Hemigruppe von Wahrscheinlichkeitsoperatoren und umgekehrt.

Zunächst betrachtet man nur lokalkompakte Lie-Gruppen, da hier der infinitesimale Erzeuger der Operator-Hemigruppe eine ganz spezielle Form hat. Die Betrachtung von Hemigruppen an Stelle von  $G$ -wertigen Prozessen hat den Vorteil, daß  $G$  nicht als separabel vorausgesetzt werden muß, was in [31] geschieht, wo die Konvergenz gegen und die Darstellung von  $G$ -wertigen Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen ausführlich behandelt wird im Zusammenhang mit dem Martingal-Problem. Setzt man allerdings die Separabilität von  $G$  nicht voraus, so lassen sich die Ergebnisse übertragen auf Gruppen, die der projektive Limes von Lie-Gruppen sind, also insbesondere die Kompakten.

Als wesentlich erweist sich die folgende Funktionalgleichung

(mit  $T(s,t) = T_\mu(s,t)$ ) :

$$\begin{aligned}
 \text{vii)} \quad & T(s,t) f(e) = f(e) + \int_{i=1}^M \int_{[s,t]} T(r,t) D_i f(e) a_0(i)(dr) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{i,j=1}^M \int_{[s,t]} T(r,t) D_i D_j f(e) b_0(i,j)(dr) \\
 & + \int_{G \times [s,t]} \int T(r,t) (f(y) - f(e) - \sum_{i=1}^M D_i(f(e) f_i(y)) \mu_0(dy \times dr)
 \end{aligned}$$

Da auf vii) in Kapitel IV. ausführlich eingegangen wird, sei hier nur soviel bemerkt, daß  $(a_0, b_0, \mu_0)$  dem Tripel bestehend aus einer Konstanten  $a$ , der Variante  $\sigma^2$  und dem Levy-Maß  $\eta$  entspricht, das im Fall reeller Zufallsvariabler eine unbeschränkt teilbare Verteilung charakterisiert. Ebenso wie dort zeigt man, daß "Verteilungskonvergenz" genau dann vorliegt, wenn die entsprechenden Größen gegen  $a_0$ ,  $b_0$  und  $\mu_0$  gleichmäßig, weil diese ja hier Funktionen sind, konvergieren.

Der Beweis verläuft folgendermaßen: Zunächst zeigt man die relative Kompaktheit der Folge  $(T_n(s,t))_n$  bzw.  $(\mu_n(s,t))_n$ , dann zeigt man, daß jeder Grenzwert vii) erfüllt und zuletzt, daß die Lösung von viii) unter den Wahrscheinlichkeitsoperatoren eindeutig bestimmt ist.

Satz IV. 10 und Folgerung IV. 13 liefern damit eine Charakterisierung der Konvergenz von Faltungs-Hemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf lokalkompakten Lie-Gruppen, Satz IV. 16 verallgemeinert die Ergebnisse dann für Lie-projektive Gruppen, insbesondere die Kompakten (siehe [10], [18], [31], [47]).

Ich möchte mich bei Professor W.J. Bühler für seine Unterstützung bedanken, ohne ihn wäre diese Arbeit nicht entstanden, und bei Professor H.-J. Schuh für die hilfreichen Diskussionen.

## KAPITEL 1

### SCHWACHE STABILITÄT STOCHASTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN BEI INTEGRIERENDEM PARTIALSUMMENPROZESS

Es seien  $\mathcal{F}_{n,j}$ ,  $j = 0, 1, \dots$ ;  $n = 1, 2, \dots$   $\sigma$ -Algebren mit

$$\mathcal{F}_{n,0} \subseteq \mathcal{F}_{n,1} \subseteq \dots \text{ für alle } n, \quad \mathcal{F}_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n,0};$$

$T_{n,j}$ ;  $j = 0, 1, \dots$ ;  $n = 1, 2, \dots$  seien  $\mathbb{R}_+$ -wertige Zufallsvariable

mit  $0 = T_{n,0} < T_{n,1} < T_{n,2} < \dots$  für alle  $n$  und

$\sigma(T_{n,j}) \subseteq \mathcal{F}_{n,j-1}$  für alle  $n, j \geq 1$ .

Damit definiert man  $k_n(t) := \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \mathbb{1}_{\{T_{n,j} \leq t\}} = \#\{j > 0 \mid T_{n,j} \leq t\}$ ,

dann ist  $k_n(t) = k \Leftrightarrow T_{n,k} \leq t < T_{n,k+1}$ . Dann ist also

$k_n(t)$  eine Stoppzeit bzgl.  $(\mathcal{F}_{n,j})_j$  und  $k_n(\cdot)$  ein  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}([0, \infty))$ -wertiger Prozeß (s. u.).

#### 1. Bemerkung

- a) Ist ein solcher Prozeß  $k_n(\cdot)$  gegeben, so daß  $k_n(t)$  Stoppzeit ist bzgl.  $(\mathcal{F}_{n,j})_j$ , so kann man durch die Definition  $T_{n,k} := \inf\{t \mid k_n(t) \geq k\}$  die zugehörige  $(T_{n,j})_j$ -Folge gewinnen.
- b) Sind  $X_1, X_2, \dots$  zufällige Vektoren, dann ist

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \mathbb{1}_{\{T_{n,j} \leq t\}} X_j = \sum_{j=1}^{k_n(t)} X_j$$

Es sei  $\mathbb{M}^M$  der Ring der reellen, quadratischen Matrizen mit Seitenlänge

$M$ . Man hat folgende äquivalente Normen:  $\|A\| := \left( \sum_{i,j=1}^M A^2(i,j) \right)^{1/2}$  und

$\|A\|_1 := \sum_{i,j=1}^M |A(i,j)|$ . Als Vektorraum kann man  $\mathbb{M}^M$  natürlich mit dem

$\mathbb{R}^{M^2}$  identifizieren, ebenso den (die) Dualraum(räume).

Seien die  $X_{n,j}$   $j = 0, 1, \dots$ ;  $n = 1, 2, \dots$   $M^M$ -wertige Zufallsvariable mit  $\sigma(X_{n,j}) \subset \mathcal{F}_{n,j}$  für alle  $n, j$ , dann ist der Partialsummenprozeß definiert durch

$$X_n(t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} X_{n,j}.$$

Betrachtet werden im Folgenden nur sogenannte cadlag Prozesse: Sei  $X$  ein vollständiger, separabler, metrischer Raum, dann ist

$$D_X([0,1]) = \{x: [0,1] \rightarrow X \mid x \text{ ist rechtsstetig mit linkem Grenzwert}\}$$

der Raum der cadlag-Funktionen. Man kann ihn mit einer Metrik versehen, die ihn zu einem vollständigen, separablen, metrischen Raum macht. Den folgenden Satz findet man in [40] für reellwertige Prozesse, der Beweis funktioniert aber ebenso im mehrdimensionalen Fall.

Für die Folge  $(\tau_n, \delta_n)_n$  sei

- i) bei jedem festen  $n$ :  $\tau_n$  ist eine Stopzeit für den Prozeß  $\{X_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$  bzgl. der natürlichen  $\sigma$ -Algebren  $\{\sigma(X_n(s), 0 \leq s \leq t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ,  $\tau_n$  nimmt nur endlich viele Werte an.
- ii)  $\delta_n \in [0,1]$  für alle  $n$  und  $\delta_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

#### Satz T

Für jede Folge  $(\tau_n, \delta_n)_n$  mit i) und ii) gelte:

$d(X_n(\tau_n + \delta_n), X_n(\tau_n)) \rightarrow 0$  nach Wahrscheinlichkeit. Sei  $T_0$  dicht in

$[0,1]$  mit  $1 \in T_0$  und für jedes  $t \in T_0$  sei  $\{P X_n^{-1}(t)\}_n$  straff (bzw. relativ

kompakt). Es gilt:  $\{P X_n^{-1}\}_n$  ist straff und die Häufungspunkte sind stochastisch stetige Prozesse.

Nun zur Definition des Prozesses  $Y_n(\cdot)$ .

Sei  $Y_{n,0}$  eine  $\mathcal{F}_{n,0}$ -meßbare Zufallsvariable für jedes  $n$ .



Setze:  $\tilde{Y}_{n,0} = Y_{n,0}$ ,  $\tilde{Y}_{n,j+1} = \tilde{Y}_{n,j} + h_n(T_{n,j}, \sum_{i=1}^j X_{n,i}, \tilde{Y}_{n,j}) \cdot X_{n,j+1}$   
 $; j \geq 0$

wo  $h_n: R_+ \times M^M \times M^M \rightarrow M^M$  eine meßbare Funktion ist.

Nun setzt man  $Y_n(t) = \tilde{Y}_{n,j}$ ,  $T_{n,j} \leq t < T_{n,j+1}$ , dann ist

$$Y_n(t) = Y_{n,0} + \sum_{j=1}^{k_n(t)} h_n(T_{n,j-1}, X_n(T_{n,j-1}), Y_n(T_{n,j-1})) X_{n,j}$$

## 2. Bemerkung

Für festes  $n$  ist  $Y_n$  Lösung des Cauchy-Problems:

$$dY_n(t) = h_n(t-, X_n(t-), Y_n(t-)) dX_n(t) \text{ mit } Y_n(0) = Y_{n,0}$$

Man zeigt später, daß die folgende Voraussetzung, mit deren Hilfe die Straffheit der Prozesse nachgewiesen wird, noch abgeschwächt werden kann und dann im wesentlichen die Bedingungen enthält, die für die Verteilungskonvergenz von  $X_n$  hinreichend sind.

Schreibweise:  $E_{n,j-1} X = E(X | f_{n,j-1})$ , damit ist

## Voraussetzung 1

$$k_n(1) \leq a_n; |Y_{n,0}| \leq C \forall n;$$

$$|X_{n,j}| = \left( \sum_{i=1}^n X_{n,j}^2(i,1) \right)^{1/2} \leq C \forall n,j$$

$$\text{Sei } \bar{X}_{n,j-1} = E_{n,j-1} X_{n,j} = (E_{n,j-1} X_{n,j}(i,1)),$$

$$Y_{n,j-1} = (E_{n,j-1} X_{n,j}^2(i,1)), \text{ mit der 1-Norm in } M^M \text{ setzt man}$$

$$\bar{X}_n(t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} |\bar{X}_{n,j-1}|_1,$$

$$Y_n(t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} |Y_{n,j-1}|_1; \text{ es gibt f. s. stetige, } f_0\text{-meßbare}$$

Prozesse  $\mathbb{X}(\cdot)$  und  $\mathbb{Y}(\cdot)$  so, daß gilt:

$$P \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{X}_n(t) - \mathbb{X}_n(s)) \leq \mathbb{X}(t) - \mathbb{X}(s) \quad \forall s \leq t \right) = 1,$$

$$P \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{Y}_n(t) - \mathbb{Y}_n(s)) \leq \mathbb{Y}(t) - \mathbb{Y}(s) \quad \forall s \leq t \right) = 1,$$

Außerdem benötigt man noch eine Regularitätsvoraussetzung für die  $h_n$ :

#### Voraussetzung 2

Die Funktionen  $h_n: \mathbb{R}_+^M \times \mathbb{M}^M \times \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  erfüllen die Lipschitzbedingung:  
es gibt ein  $L > 0$ , so daß

$$\|h_n(t, x, y) - h_n(t', x', y')\| \leq L (|t - t'| + \|x - x'\| + \|y - y'\|)$$

$\forall (t, x, y), (t', x', y'), n$  und es ist  $\sup_n \|h_n(0, 0, 0)\| < \infty$

#### 3. Bemerkung

Setzte man zusätzlich  $h_n(t, x, y)$  und  $L$  als  $f_0$ -meßbare Zufallsvariable an, so würde das nichts an der folgenden Aussage ändern.

#### 4. Lemma

Sind die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt, dann sind die Verteilungen von  $X_n$  und  $Y_n$  und alle Häufungspunkte stochastisch stetig.

#### Beweis

Man will den oben zitierten Satz T anwenden, dazu muß

$P(\|Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)\| > \varepsilon)$  abgeschätzt werden. Da der Beweis recht aufwendig ist, zunächst die Idee B. Dazu nimmt man an:

$\mathbb{M}^M = \mathbb{R}$ ,  $\sigma(X_{n,j})_j$  unabhängig,  $k_n, \tau_n$  nicht zufällig und  $h_n(t, x, y) = h_n(y)$ .

$$Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n) = \sum_{j \geq 1} h_n(Y_n(T_{n,j-1})) X_{n,j} \mathbb{1}_{\{k_n(\tau_n) < j \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}}$$

$$\text{Sei } S_r = \sum_{j=1}^r h_n(Y_n(T_{n,j-1})) X_{n,j} \mathbb{1}_{\{k_n(\tau_n) < j \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}},$$

dann ist

$$S_r = S_{r-1} + h_n(Y_n(T_{n,r-1})) X_{n,r}^1 \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\},$$

$$S_r^2 = S_{r-1}^2 + 2S_{r-1} h_n(Y_n(T_{n,r-1})) X_{n,r}^1 \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\} \\ + h_n^2(Y_n(T_{n,r-1})) X_{n,r}^2 \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\},$$

$$\begin{aligned} E_{n,r-1} S_r^2 &= S_{r-1}^2 + \\ &+ 2S_{r-1} h_n(Y_n(T_{n,r-1})) \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}^1 E X_{n,r} \\ &+ h_n^2(Y_n(T_{n,r-1})) \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}^1 E X_{n,r}^2 \leq \\ &\leq S_{r-1}^2 + S_{r-1}^2 \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\} |E X_{n,r}| + \\ &+ h_n(Y_n^2(T_{n,r-1})) \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}^1 |E X_{n,r}| \\ &+ h_n(Y_n^2(T_{n,r-1})) \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}^1 E X_{n,r}^2 \leq \\ &\leq S_{r-1}^2 (1 + 1 \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\} |E X_{n,r}| + \\ &+ 4 (h_n^2(Y_n(\tau_n)) + L^2(Y_n(T_{n,r-1}) - Y_n(\tau_n))^2) \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}^1 \\ &\cdot (|E X_{n,r}| + E X_{n,r}^2) \end{aligned}$$

da  $|Y_n(0)| \leq C$  ist und

$$(Y_n(T_{n,r-1}) - Y_n(\tau_n)) \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}^1 = \\ = S_{r-1}^1 \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}, \text{ ist}$$

$$E_{n,r-1} S_r^2 \leq S_{r-1}^2 (1 + \frac{1}{\{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}} 4(1 + L^2) \cdot (|E X_{n,r}| + E X_{n,r}^2) + \\ + 4h_n^2(Y_n(\tau_n)) \frac{1}{\{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}} (|E X_{n,r}| + E X_{n,r}^2)$$

$$\text{Mit } h_n^2(Y_n(\tau_n)) \leq 2h_n^2(0) + 2L Y_n^2(\tau_n) \leq C + 2L Y_n^2(\tau_n)$$

ergibt sich für ein  $C_1$ :

$$E S_r^2 \leq E S_{r-1}^2 (1 + C_1 \frac{1}{\{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}} (|E X_{n,r}| + E X_{n,r}^2) + \\ + C_1 \frac{1}{\{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}} (1 + E Y_n^2(\tau_n)) \cdot (|E X_{n,r}| + E X_{n,r}^2)$$

$$\text{Sei } \Pi_j := \prod_{i=1}^j (1 + C_1 \frac{1}{\{k_n(\tau_n) < i \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}} (|E X_{n,i}| + E X_{n,i}^2))$$

$$\text{dann ist } \pi_j \leq \exp \{ C \frac{k_n(\tau_n + \delta_n)}{\sum_{i=k_n(\tau_n)+1}^{k_n(\tau_n + \delta_n)} (|E X_{n,i}| + E X_{n,i}^2)} \} \\ = \exp \{ C_1 (Z_n(\tau_n + \delta_n) - Z_n(\tau_n)) + \\ + C_1 (Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)) \}, \forall j$$

$$\text{und } E \frac{1}{\pi_r} S_r^2 \leq E \frac{1}{r-1} S_r^2 - 1 + \\ + \frac{1}{\prod_{r=1}^{r-1} \{k_n(\tau_n) < r \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}} (1 + E Y_n^2(\tau_n)) \cdot \\ \cdot (|E X_{n,r}| + E X_{n,r}^2),$$

$$E \frac{S_r^2}{\pi_r} \leq \sum_{j=1}^r \frac{1}{\pi_{j-1}} C_1 \frac{1}{\{k_n(\tau_n) < j \leq k_n(\tau_n + \delta_n)\}} (1 + E Y_n^2(\tau_n)) \cdot \\ \cdot (|E X_{n,j}| + E X_{n,j}^2)$$

Nach Voraussetzung 1 gibt es ein  $C_2$  mit

$$\sup_n \{Z_n(1) + Y_n(1)\} < C_2, \text{ also ist}$$

$$1 \leq \Pi_j \leq e^{C_1 C_2} \quad \forall j, n \text{ und damit}$$

$$E S_r^2 \leq C_3 (1 + E Y_n^2(\tau_n)) \sum_{j=k_n(\tau_n)+1}^{k_n(\tau_n+\delta_n)} (|E X_{n,j}| + E X_{n,j}^2) \quad \forall n, r$$

Da weiterhin  $S_r = Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)$  ist für  $r$  hinreichend groß, ist dann

$$\begin{aligned} E (Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n))^2 &\leq \\ &\leq C_3 (1 + E Y_n^2(\tau_n)) ((Z_n(\tau_n + \delta_n) - Z_n(\tau_n) + \\ &+ Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)) \quad \forall n \end{aligned}$$

Sei  $\tau_n = 0$ ,  $\delta_n = t_n$ , dann ist

$$E (Y_n(t_n) - Y_n(0))^2 \leq C_3 (1 + C^2) (Z_n(1) + Y_n(1)) \quad \forall n$$

$$\text{also } E Y_n^2(t_n) \leq C_4 \quad \forall n \text{ und}$$

$$\begin{aligned} E (Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n))^2 &\leq \\ &\leq C_5 (Z_n(\tau_n + \delta_n) - Z_n(\tau_n) + Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)) \quad \forall n \end{aligned}$$

Aus Voraussetzung 1 folgt nun sofort, daß die Voraussetzungen von Satz T erfüllt sind.

Da im Folgenden der Index  $n$  festgehalten wird, läßt man ihn bei  $\tau_n$  und

$S_{n,r}$  fort, d. h.  $\tau_n = \tau$ ,  $S_{n,r} = S_r$ .

Sei  $F_{n,0} \in \mathcal{F}_{n,0}$ ,  $F_{n,j} \in \mathcal{F}_{n,j-1}$  für  $j \geq 1$ ,  $h_{n,j}$  seien  $\mathcal{F}_{n,j}$ -meßbare,  $\mathbb{M}^M$ -wertige Zufallsvariable mit  $|h_{n,j}| \leq C \quad \forall n, j$ .

Sei  $h_{n,-1}$  eine feste Matrix. Definiere

$$S_r = \begin{cases} h_{n,-1} \cdot Y_{n,0} \cdot \frac{1}{F_{n,0}}, & r = 0 \\ S_{r-1} + h_{n,r-1} X_{n,r} \cdot \frac{1}{F_{n,r}}, & r \geq 1 \end{cases} \quad \text{dann ist}$$

$$S_r = S_{r-1} + h_{n,r-1} X_{n,r} \quad 1_{F_{n,r}} = >$$

$$\begin{aligned} S_r^2(k,1) &= S_{r-1}^2(k,1) + 2 \sum_{i=1}^M S_{r-1}(k,1) h_{n,r-1}(k,i) X_{n,r}(i,1) \cdot 1_{F_{n,r}} + \\ &+ \left( \sum_{i=1}^M h_{n,r}(k,i) X_{n,r}(i,1) \cdot 1_{F_{n,r}} \right)^2 \leq \\ &\leq S_{r-1}^2(k,1) + 2 \sum_{i=1}^M S_{r-1}(k,1) h_{n,r-1}(k,i) X_{n,r}(i,1) \cdot 1_{F_{n,r}} + \\ &+ \sum_{i=1}^M h_{n,r}^2(k,i) \sum_{j=1}^M X_{n,r}^2(j,1) \cdot 1_{F_{n,r}} = > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{n,r-1} S_r^2(k,1) &\leq S_{r-1}^2(k,1) + 2 \sum_{i=1}^M S_{r-1}(k,1) h_{n,r-1}(k,i) \cdot \\ &\cdot E_{n,r-1} X_{n,r}(i,1) \cdot 1_{F_{n,r}} + \\ &+ \sum_{i=1}^M h_{n,r}^2(k,i) \sum_{j=1}^M E_{n,r-1} X_{n,r}^2(j,1) \cdot 1_{F_{n,r}} \\ &\leq S_{r-1}^2(k,1) + 2 \sum_{i=1}^M S_{r-1}(k,1) \cdot |h_{n,r-1}(k,i)| \cdot |E_{n,r-1} X_{n,r}(i,1)| \cdot 1_{F_{n,r}} + \\ &+ \sum_{i=1}^M h_{n,r}^2(k,i) \sum_{j=1}^M E_{n,r-1} X_{n,r}^2(j,1) \cdot 1_{F_{n,r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} => E_{n,r-1} \|S_r\|^2 &= \sum_{k,l=1}^M E_{n,r-1} S_r^2(k,1) \leq \\ &\leq \sum_{k,l=1}^M S_{r-1}^2(k,1) + 2 \sum_{i,k,l=1}^M |S_{r-1}(k,1)| \cdot |h_{n,r-1}(k,i)| \cdot 1_{F_{n,r}} \cdot \\ &\cdot \sqrt{|E_{n,r-1} X_{n,r}(i,1)|^2} + \\ &+ \sum_{k,i=1}^M h_{n,r}^2(k,i) \sum_{j,l=1}^M E_{n,r-1} X_{n,r}^2(j,1) \cdot 1_{F_{n,r}} \leq \\ &\leq \|S_{r-1}\|^2 + \sum_{i,k,l=1}^M S_{r-1}^2(k,1) \cdot 1_{F_{n,r}} \cdot |E_{n,r-1} X_{n,r}(i,1)| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i,k,l=1}^M h_{n,r-1}^2 (k,i) \frac{1}{F_{n,r}} |E_{n,r-1} x_{n,r} (i,l)| + \\
 & + \|h_{n,r-1}\|^2 \cdot \frac{1}{F_{n,r}} \cdot \|y_{n,r-1}\|_1 \leq \\
 & \leq \|s_{r-1}\|^2 + \|s_{r-1}\|^2 \frac{1}{F_{n,r}} \|z_{n,r-1}\|_1 + \\
 & + \|h_{n,r-1}\|^2 \cdot \frac{1}{F_{n,r}} \cdot \|z_{n,r-1}\|_1 + \\
 & + \|h_{n,r-1}\|^2 \cdot \frac{1}{F_{n,r}} \cdot \|y_{n,r-1}\|_1 \quad \text{also gilt} \\
 (J.1) \quad E_{n,r-1} \|s_r\|^2 & \leq \|s_{r-1}\|^2 \left( 1 + \frac{1}{F_{n,r}} \|z_{n,r-1}\|_1 \right) + \\
 & + \|h_{n,r-1}\|^2 \cdot \frac{1}{F_{n,r}} \left( \|z_{n,r-1}\|_1 + \|y_{n,r-1}\|_1 \right)
 \end{aligned}$$

Man zeigt nun

(J.2) Ist  $\tau$  eine Stoppzeit bzgl.

$$(\sigma(X_n(s), 0 \leq s \leq t))_{t \geq 0} \quad \text{oder} \quad (\sigma(Y_n(s), 0 \leq s \leq t))_{t \geq 0},$$

dann ist  $k_n(\tau)$  Stoppzeit bzgl.  $(f_{n,j})_j$

Beweis (J.2): Für eine wachsende Familie von  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  und

eine Stoppzeit  $T$  setzt man  $\mathcal{G}_T := \{F \in \sigma(\mathcal{G}_t) \mid F \cap \{T \leq u\} \in \mathcal{G}_u \forall u\}$

Sei  $\mathcal{G}_{n,t} := \mathcal{G}_n, [t]$ , so ist  $k_n(s)$  für alle  $s$  eine Stoppzeit bzgl.  $(\mathcal{G}_{n,t})_{t \geq 0}$ .

Ist  $\tilde{X}_n(t) := \sum_{j=1}^{(t)} X_{n,j}$ , dann ist nach [21], Theorem 1.6,  $\tilde{X}_n$  progressiv meßbar

d.h.  $\tilde{X}_n \mid_{[0,t] \times \Omega}$  ist meßbar bzgl.  $\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{G}_{n,t}$

Sei  $\tilde{Y}_{n,0} := Y_{n,0}$ ,  $\tilde{Y}_{n,j} := h_n(T_{n,j-1}, \sum_{i=1}^{j-1} X_{n,i}, \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{Y}_{n,i-1} X_{n,i} + Y_{n,0})$

dann ist  $\tilde{Y}_{n,j} \mathcal{G}_{n,j-1}$ -meßbar, also ist auch  $\tilde{Y}_n(t) := \sum_{j=1}^{[t]} \tilde{Y}_{n,j} X_{n,j} + Y_{n,0}$

progressiv meßbar. Nach [21], Theorem 5.5 sind dann



$$X_n(t) = \tilde{X}_n(k_n(t)) \text{ und } Y_n(t) = \tilde{Y}_n(k_n(t))$$

$$G_{n,k_n}(t) \text{ -meßbar, also } \sigma(X_n(s), 0 \leq s \leq t) \subset G_{n,k_n}(t)$$

$$\text{und } \sigma(Y_n(s), 0 \leq s \leq t) \subset G_{n,k_n}(t).$$

Ist nun  $\tau$  eine Stoppzeit bzgl.  $(\sigma(X_n(s), 0 \leq s \leq t))_{t \geq 0}$ ,

so ist  $\{\tau \leq t\} \in G_{n,k_n}(t)$ . Nach Definition von  $G_{n,k_n}(t)$  ist

$$\{\tau \leq t\} \cap \{k_n(t) \leq r\} = \{\tau \leq t < T_{n,r+1}\} \in G_{n,r}$$

$$\Rightarrow \{\tau < T_{n,r+1}\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{\tau \leq q < T_{n,r+1}\} \in G_{n,r}$$

$$\Rightarrow \{k_n(\tau) = r\} = \{\tau < T_{n,r+1}\} \setminus \{\tau < T_{n,r}\} \in G_{n,r} = F_{n,r}$$

Im zweiten Fall verläuft der Beweis analog.

Gegeben sei

$$(J.3 a) (G_{n,j})_{j,n} \text{ mit } G_{n,j} \in F_{n,j-1}, G_{n,1} \supseteq G_{n,2} \supseteq \dots$$

Sind  $\tau \leq \tau_1$  zwei Stoppzeiten bzgl.  $(\sigma(X_n(s), 0 \leq s \leq t))_{t \geq 0}$  oder

$(\sigma(Y_n(s), 0 \leq s \leq t))_{t \geq 0}$ , so setzt man  $F_{n,j} := G_{n,j} \cap \{k_n(\tau) < j \leq k_n(\tau_1)\}$ ,

$$(J.3 b) F_{n,j} \in F_{n,j-1} \quad \forall n, j$$

Nun definiert man  $Y'_{n,0} := Y_{n,0} \frac{1}{F_{n,0}}$ ,

$$X'_{n,j} := X_{n,j} \frac{1}{F_{n,j}} \quad \text{für } j \geq 1;$$

$$X'_n(t) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} X'_{n,j},$$

$$Y'_n(t) := Y'_{n,0} + \sum_{j=1}^{k_n(t)} h_n(T_{n,j-1}, X_n(T_{n,j-1}), Y_n(T_{n,j-1})) X'_{n,j}$$

Mit  $h_n(T_{n,j}, X_n(T_{n,j}), Y_n(T_{n,j})) =$

$$\begin{aligned} &= h_n(0, 0, 0) + h_n(0, X_n(\tau), Y_n(\tau)) - h_n(0, 0, 0) + \\ &+ h_n(T_{n,j}, X_n(T_{n,j}), Y_n(T_{n,j})) - h_n(0, X_n(\tau), Y_n(\tau)) \end{aligned}$$

und der Lipschitz-Bedingung ergibt sich ein  $L' > L$  mit

$$\begin{aligned} & \|h_n(T_{n,j}, x_n(T_{n,j}), y_n(T_{n,j}))\|^2 \leq \\ & \leq L' \left( \|h_n(0,0,0)\|^2 + \|x_n(\tau)\|^2 + \|y_n(\tau)\|^2 + \right. \\ & \quad \left. + T_{n,j}^2 + \|x_n(T_{n,j}) - x_n(\tau)\|^2 + \|y_n(T_{n,j}) - y_n(\tau)\|^2 \right) \end{aligned}$$

1. Wählt man  $h_{n,-1} = 0$ ,  $h_{n,j} = I$  für  $j \geq 0$ ,

$$\text{so ist } S_{r,1} = S_r = \sum_{j=1}^r x_{n,j} \frac{1}{F_{n,j}} = x'_n(T_{n,r})$$

mit (J.1) folgt:

$$\begin{aligned} E_{n,r-1} \|S_{r,1}\|^2 & \leq \|S_{r-1,1}\|^2 (1 + \frac{1}{F_{n,r}} \|z_{n,r-1}\|_1) + \\ & + M \frac{1}{F_{n,r}} (\|z_{n,r-1}\|_1 + \|y_{n,r-1}\|_1) \end{aligned}$$

2. Wählt man  $h_{n,-1} = I$ ,

$$h_{n,j} = h_n(T_{n,j}, x_n(T_{n,j}), y_n(T_{n,j})) \text{ für } j \geq 0, \text{ so ist}$$

$$\begin{aligned} S_{r,2} = S_r & = y'_{n,0} + \sum_{j=1}^r h_n(T_{n,j-1}, x_n(T_{n,j-1}), y_n(T_{n,j-1})) x_{n,j} \frac{1}{F_{n,j}} = \\ & = y'_n(T_{n,r}) \end{aligned}$$

Mit (J.1) folgt

$$\begin{aligned} E_{n,r-1} \|S_{r,2}\|^2 & \leq \|S_{r-1,2}\|^2 (1 + \frac{1}{F_{n,r}} \|z_{n,r-1}\|_1) + \\ & + \|h_{n,r-1}\|_{\frac{1}{F_{n,r}}}^2 (\|z_{n,r-1}\|_1 + \|y_{n,r-1}\|_1) \end{aligned}$$

$(G_{n,j})$  ist fallend in  $j$ , also  $G_{n,j} = \bigcap_{i=1}^j G_{n,i}$

$$\Rightarrow x_{n,i} \frac{1}{G_{n,j}} = x_{n,i} \frac{1}{G_{n,i}} \frac{1}{G_{n,j}} \quad \forall i = 1, \dots, j$$

$$\{k_n(\tau) < j \leq k_n(\tau_1)\} \supseteq$$

$$\supseteq \{k_n(\tau) < j \leq r-1\} \cap \{k_n(\tau) < r \leq k_n(\tau_1)\} =$$

$$= \{k_n(\tau) < j \leq k_n(T_{n,r-1})\} \cap \{k_n(\tau) < r \leq k_n(\tau_1)\}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{F_{n,r}} (X_n(T_{n,r-1}) - X_n(\tau)) &= \\
 &= \sum_{j \geq 1} X_{n,j} \frac{1}{F_{n,r}} \{k_n(\tau) < j \leq k_n(T_{n,r-1})\} \frac{1}{F_{n,r}} \{k_n(\tau) < r \leq k_n(\tau)\} \\
 &= \sum_{j \geq 1} X_{n,j} \frac{1}{F_{n,r}} \frac{1}{F_{n,r}} \{k_n(\tau) < j \leq k_n(\tau_1)\} \frac{1}{F_{n,r}} \{j \leq r-1\} \frac{1}{F_{n,r}} \\
 &= \sum_{j=1}^{r-1} X'_{n,j} \frac{1}{F_{n,r}} = \frac{1}{F_{n,r}} S_{r-1,1}
 \end{aligned}$$

ebenso zeigt man

$$\frac{1}{F_{n,r}} (Y_n(T_{n,r-1}) - Y_n(\tau)) = \sum_{j=1}^{r-1} h_{n,j-1} X'_{n,j} \frac{1}{F_{n,r}} = \frac{1}{F_{n,r}} S_{r-1,2}$$

Mit der obigen Abschätzung für  $\|h_{n,j}\|^2$  ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{F_{n,r}} \|h_{n,r-1}\|^2 &\leq \frac{1}{F_{n,r}} L' ( \|S_{r-1,1}\|^2 + \|S_{r-1,2}\|^2 + T_{n,r-1}^2 + \\
 &+ \|X_n(\tau)\|^2 + \|Y_n(\tau)\|^2 + \|h_n(0,0,0)\|^2 )
 \end{aligned}$$

Damit wird  $E_{n,r-1} ( \|S_{r,1}\|^2 + \|S_{r,2}\|^2 ) \leq$

$$\begin{aligned}
 &\leq ( \|S_{r-1,1}\|^2 + \|S_{r-1,2}\|^2 ) ( 1 + \frac{1}{F_{n,r}} \|z_{n,r-1}\|_1 ) + \\
 &+ \frac{1}{F_{n,r}} ( \|z_{n,r-1}\|_1 + \|y_{n,r-1}\|_1 ) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cdot ( M + L' ( \|S_{r-1,1}\|^2 + \|S_{r-1,2}\|^2 + T_{n,r-1}^2 + \|X_n(\tau)\|^2 + \|Y_n(\tau)\|^2 + \\
 &+ \|h_n(0,0,0)\|^2 ) )
 \end{aligned}$$

$$\leq ( \|S_{r-1,1}\|^2 + \|S_{r-1,2}\|^2 ) \cdot ( 1 + \frac{1}{F_{n,r}} (L' + 1) \cdot (\|z_{n,r-1}\|_1 + \|y_{n,r-1}\|_1) )$$

$$+ \frac{1}{F_{n,r}} ( \|z_{n,r-1}\|_1 + \|y_{n,r-1}\|_1 )$$

$$\cdot ( M + L' ( T_{n,r-1}^2 + \|h_n(0,0,0)\|^2 ) + L' ( \|X_n(\tau)\|^2 + \|Y_n(\tau)\|^2 ) )$$

Mit einem hinreichend großen  $L'' > L'$  wird

$$E_{n,r-1} ( \|S_{r,1}\|^2 + \|S_{r,2}\|^2 ) \leq ( \|S_{r-1,1}\|^2 + \|S_{r-1,2}\|^2 ) ( 1 + \frac{1}{F_{n,r}} L'' (\|z_{n,r-1}\|_1 + \|y_{n,r-1}\|_1) )$$

$$+ \|y_{n,r-1}\|_1) + (1 + \|x_n(\tau)\|^2 + \|y_n(\tau)\|^2) \frac{1}{F_{n,r}} \cdot L^* \cdot (\|x_{n,r-1}\|_1 + \|y_{n,r-1}\|_1)$$

Definiert man nun  $a_{n,r-1} := L^* (\|x_{n,r-1}\|_1 + \|y_{n,r-1}\|_1)$ ,

$$\Pi_{n,r} := \prod_{j=1}^r (1 + \frac{1}{F_{n,j}} a_{n,j-1})$$

dann ist  $\Pi_{n,r} f_{n,r-1}$ -meßbar und man erhält

$$E_{n,r-1} \frac{\|s_{r,1}\|^2 + \|s_{r,2}\|^2}{\Pi_{n,r}} \leq \frac{\|s_{r-1,1}\|^2 + \|s_{r-1,2}\|^2}{\Pi_{n,r-1}} + \frac{1}{F_{n,r}} \frac{a_{n,r-1}}{\Pi_{n,r}} (1 + \|x_n(\tau)\|^2 + \|y_n(\tau)\|^2)$$

daraus ergibt sich  $E \left( \frac{1}{\Pi_{n,r}} (\|s_{r,1}\|^2 + \|s_{r,2}\|^2) | f_0 \right) \leq$

$$\leq E \left( \frac{1}{\Pi_{n,r-1}} (\|s_{r-1,1}\|^2 + \|s_{r-1,2}\|^2) | f_0 \right) + E \left( \frac{1}{\Pi_{n,r}} \cdot \frac{1}{F_{n,r}} \cdot a_{n,r-1} (1 + \|x_n(\tau)\|^2 + \|y_n(\tau)\|^2) | f_0 \right) \leq$$

$$\leq \dots \leq E (\|s_{0,1}\|^2 + \|s_{0,2}\|^2 | f_0) + \sum_{j=1}^r E \left( \frac{1}{\Pi_{n,j}} \cdot \frac{1}{F_{n,j}} \cdot a_{n,j-1} (1 + \|x_n(\tau)\|^2 + \|y_n(\tau)\|^2) | f_0 \right)$$

mit  $s_{0,1} = 0, s_{0,2} = y_{n,0}$  folgt

$$(J.4) \quad E \left( \frac{\|s_{r,1}\|^2 + \|s_{r,2}\|^2}{\Pi_{n,r-1}} | f_0 \right) \leq E (\|y_{n,0}\|^2 | f_0) + E \left( \sum_{j=1}^r \frac{1}{\Pi_{n,j}} \cdot \frac{1}{F_{n,j}} \cdot a_{n,j-1} (1 + \|x_n(\tau)\|^2 + \|y_n(\tau)\|^2) | f_0 \right)$$

1. Man zeigt nun, daß es zu jedem  $\eta > 0$  ein  $A > 0$  gibt mit

$$P (\{ \|x_n(\tau_n)\| > A \} \cap \{ \|y_n(\tau_n)\| > A \}) < \eta \quad \forall n$$

$$\text{Sei } \tau := 0, F_{n,0} := \{ \|y_{n,0}\|^2 \leq A_1 \}$$

$$G_{n,j} := \{ \|y_{n,0}\|^2 \leq A_1, \sum_{i=1}^j a_{n,i-1} 1_{\{k_n(\tau_1) \geq i\}} \leq A_2 \}$$

Damit wird  $\|y'_{n,0}\|^2 \leq A_1, \sum_{i=1}^j 1_{F_{n,i}} a_{n,i-1} \leq A_2,$

also gilt:  $1 \leq \Pi_{n,r} \leq \exp \{A_2\}$ ; mit  $\tau = 0, x_n(0) = 0,$

$y_n(0) = y_{n,0}$  folgt aus (J.4)

$$E(\|S_{r,1}\|^2 + \|S_{r,2}\|^2 \mid f_0) \leq$$

$$\leq \exp \{A_2\} (A_1 + E(\sum_{j=1}^r a_{n,j-1} 1_{\{k_n(\tau_1) \geq j\}} 1_{G_{n,j}} (1 + \|y_{n,0}\|^2) \mid f_0)) \leq$$

$$\leq e^{A_2} (A_1 + A_2 (A_1 + 1)) =: A_3$$

Für  $r \rightarrow \infty$  gilt:  $S_{r,1} \rightarrow X'_n(\tau_1)$  f. s. und  $S_{r,2} \rightarrow Y'_n(\tau_1)$  f.s.

Mit dem Lemma von Fatou folgt daraus:

$$E(\|X'_n(\tau_1)\|^2 + \|Y'_n(\tau_1)\|^2 \mid f_0) \leq$$

$$\leq \lim_{r \rightarrow \infty} E(\|S_{r,1}\|^2 + \|S_{r,2}\|^2 \mid f_0) \leq A_3 \text{ f.s.}$$

$$\{X_n(\tau_1) \neq X'_n(\tau_1)\} \cup \{Y_n(\tau_1) \neq Y'_n(\tau_1)\} \subset$$

$$\subset \{\|y_{n,0}\|^2 > A_1\} \cup \{\sum_{j=1}^{k_n(\tau_1)} a_{n,j-1} > A_2\},$$

Daraus folgt nun mit der Chebychev-Ungleichung:

$$P(\{\|X_n(\tau_1)\| > A\} \mid \{\|Y_n(\tau_1)\| > A\}) \leq$$

$$\leq 2 A_3 \cdot \frac{1}{A^2} + P(\|y_{n,0}\|^2 > A_1) +$$

$$+ P(\sum_{j=1}^{k_n(\tau_1)} a_{n,j-1} > A_2) \geq$$

$$\leq 2 \frac{A_3}{A^2} + \frac{C^2}{A_1} + P(\sum_{j=1}^{k_n(1)} a_{n,j-1} > A_2)$$

Da die rechte Seite unabhängig ist von der Stoppzeit  $\tau_1$ , kann man

$\tau_1 = \tau_n$  von  $n$  abhängig wählen und erhält wieder diese Ungleichung:

$$P(\{\|X_n(\tau_n)\| > A\} \cup \{\|Y_n(\tau_n)\| > A\}) \leq$$

$$\leq 2 \frac{A_2^2}{A^2} + \frac{C^2}{A_1} + P\left(\sum_{j=1}^{k_n(1)} a_{n,j-1} > A_2\right).$$

$$\sum_{j=1}^{k_n(1)} a_{n,j-1} = L^* \mathcal{X}_n(1) + L^* \mathcal{Y}_n(1), \text{ also}$$

$$\lim_n \sum_{j=1}^{k_n(1)} a_{n,j-1} \leq L^*(\mathcal{X}(1) + \mathcal{Y}(1)) \text{ f.s.}$$

$$\text{Sei } \eta > 0; \text{ es gibt ein } A_2 \text{ so, da\ss } P\left(\sum_{j=1}^{k_n(1)} a_{n,j-1} > A_2\right) \leq \frac{\eta}{3} \quad \forall n,$$

$$\text{ein } A_1 \text{ so, da\ss } \frac{C^2}{A_1} < \eta \text{ und ein } A \text{ so, da\ss } 2 \frac{A^3}{A^2} < \frac{\eta}{3}, \text{ also gilt}$$

$$(J.5) \bigwedge_{\eta > 0} \bigvee_A \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P(\{|X_n(\tau_n)| > A\} \cap \{|Y_n(\tau_n)| > A\}) < \eta$$

2. Man zeigt nun:

Zu jedem  $\varepsilon, \eta > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, da\ss

$$P(\{|X_n(\tau_n + \delta_n) - X_n(\tau_n)| > \varepsilon\} \cap \{|Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)| > \varepsilon\}) \leq \eta \quad n \geq n_0$$

Man h\alt nun zun\achst wieder  $n$  fest, dann setzt man  $F_{n,0} = \emptyset$ ,

$$G_{n,j} := \{|X_n(\tau) \leq A_1, |Y_n(\tau)| \leq A_1,$$

$$\sum_{l=1}^j a_{n,l-1} \cdot \frac{1}{\Delta} \{k_n(\tau) < l \leq k_n(\tau_1)\} \leq \Delta\}$$

$$\text{Dann ist } Y_{n,0} = 0, \quad \sum_{i=1}^j a_{n,i-1} \frac{1}{\Delta} F_{n,i} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \{|X_n(\tau) \leq A_1, |Y_n(\tau)| \leq A_1\}.$$

$$\cdot \sum_{i=1}^j a_{n,i-1} \frac{1}{\Delta} \{k_n(\tau) < i \leq k_n(\tau_1)\}.$$

$$\cdot \frac{1}{\Delta} \{ \sum_{l=1}^i a_{n,l-1} \frac{1}{\Delta} \{k_n(\tau) < l \leq k_n(\tau_1)\} \leq \Delta\}$$

Daraus folgt  $1 \leq \Pi_{n,r} \leq \exp \{ \Delta \}$  und

$$\sum_{j=1}^r \frac{1}{F_{n,j}} a_{n,j-1} (1 + |X_n(\tau)|^2 + |Y_n(\tau)|^2) \leq 2(A_1^2 + 1) \cdot \Delta;$$

außerdem ist

$$F_{n,j} = \{ |X_n(\tau)| \leq A_1, |Y_n(\tau)| \leq A_1, k_n(\tau) < j \leq k_n(\tau_1) \}$$

$$\bigcap_{l=1}^j a_{n,l-1} \cdot \frac{1}{\{k_n(\tau) < l \leq k_n(\tau_1)\}} \leq \Delta \in F_{n,j-1}$$

$$\text{Mit (J.4) folgt: } E ( |S_{r,1}|^2 + |S_{r,2}|^2 \mid f_0 ) \leq$$

$$\leq E ( \sum_{j=1}^r a_{n,j-1} \frac{1}{F_{n,j}} (1 + |X_n(\tau)|^2 + |Y_n(\tau)|^2) \mid f_0 ) \cdot e^\Delta \leq$$

$$\leq e^\Delta (2A_1^2 + 1) \cdot \Delta$$

Für  $r \rightarrow \infty$  gilt  $S_{r,1} \rightarrow X'_n(\tau_1) - X'_n(\tau)$  f.s.

und  $S_{r,2} \rightarrow Y'_n(\tau_1) - Y'_n(\tau)$  f.s.

Mit dem Lemma von Fatou folgt daraus

$$E ( |X'_n(\tau_1) - X'_n(\tau)|^2 + |Y'_n(\tau_1) - Y'_n(\tau)|^2 \mid f_0 ) \leq$$

$$\leq \lim_{r \rightarrow \infty} E ( |S_{r,1}|^2 + |S_{r,2}|^2 \mid f_0 ) \leq e^\Delta (2A_1^2 + 1) \Delta \text{ f.s.}$$

$$\{X'_n(\tau_1) - X'_n(\tau) \neq X_n(\tau_1) - X_n(\tau)\} \cup$$

$$\cup \{Y'_n(\tau_1) - Y'_n(\tau) \neq Y_n(\tau_1) - Y_n(\tau)\}$$

$$\subseteq \{ |X_n(\tau)| > A_1 \} \cup \{ |Y_n(\tau)| > A_1 \} \cup \{ \frac{k_n(\tau_1)}{\sum_{l=k_n(\tau)+1}^n} a_{n,l-1} > \Delta \}$$

Mit der Chebychev-Ungleichung folgt nun

$$P(\{|X_n(\tau_1) - X_n(\tau)| > \varepsilon\} \cup \{|Y_n(\tau_1) - Y_n(\tau)| > \varepsilon\}) \leq$$

$$\leq P(\{|X_n(\tau)| > A_1\} \cup \{|Y_n(\tau)| > A_1\}) +$$

$$+ P(\frac{k_n(\tau_1)}{\sum_{l=k_n(\tau)+1}^n} a_{n,l-1} > \Delta) + 2e^\Delta (2A_1^2 + 1) \cdot \frac{\Delta}{\varepsilon^2}$$

mit  $\tau = \tau_n$ ,  $\tau_1 = \tau_n + \delta_n$  folgt also

$$\begin{aligned} & P(\{ \|X_n(\tau_n + \delta_n) - X_n(\tau_n)\| > \varepsilon \} \{ \|Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)\| > \varepsilon \}) \leq \\ & \leq P(\{ \|X_n(\tau_n)\| > A_1 \} \{ \|Y_n(\tau_n)\| > A_1 \}) + \\ & + P\left(\sum_{l=k_n(\tau_n)+1}^{k_n(\tau_n+\delta_n)} a_{n,l-1} > \Delta\right) + 2e^{\Delta} (2A_1^2 + 1) \cdot \frac{\Delta}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=k_n(\tau_n)+1}^{k_n(\tau_n+\delta_n)} a_{n,l-1} = L''(Z_n(\tau_n + \delta_n) - Z_n(\tau_n) + \\ & + Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)) \end{aligned}$$

Aus Voraussetzung 1 und Satz T folgt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup \{ \|Z_n(t) - Z_n(s)\| \mid |s - t| \leq \delta \} = 0 \text{ f.s.}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup \{ \|Y_n(t) - Y_n(s)\| \mid |s - t| \leq \delta \} = 0 \text{ f.s.,}$$

also gibt es ein  $n_0 = n_0(\Delta, \eta)$  mit

$$P\left(\sum_{l=k_n(\tau_n)+1}^{k_n(\tau_n+\delta_n)} a_{n,l-1} > \Delta\right) \leq \eta \frac{1}{3} \quad \forall n \geq n_0.$$

Sei also  $\varepsilon, \eta > 0$  beliebig.

Es gibt nach (J.5) ein  $A_1$  mit

$$P(\{ \|X_n(\tau_n)\| > A_1 \} \{ \|Y_n(\tau_n)\| > A_1 \}) < \frac{\eta}{3} \quad \forall n,$$

$$\text{wähle ein } \Delta \text{ mit } 2e^{\Delta} (2A_1^2 + 1) \cdot \frac{\Delta}{\varepsilon^2} < \frac{\eta}{3}$$

und dann  $n_0 = n_0(\Delta, \eta)$  wie oben, dann gilt für  $n \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} & P(\{ \|X_n(\tau_n + \delta_n) - X_n(\tau_n)\| > \varepsilon \} \\ & \{ \|Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)\| > \varepsilon \}) < \eta \end{aligned}$$

Damit wurde gezeigt:

$$\begin{aligned} (J.6) \quad \bigwedge_{\varepsilon, \eta > 0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n \geq n_0} & P(\{ \|X_n(\tau_n + \delta_n) - X_n(\tau_n)\| > \varepsilon \} \\ & \{ \|Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n)\| > \varepsilon \}) < \eta \end{aligned}$$



Aus (J.5) und (J.6) folgt nun sofort mit Satz T die Behauptung von Lemma 4.

Nachdem man also die Straffheit der Verteilungen nachgewiesen hat, muß noch gezeigt werden, daß die endlichdimensionalen Verteilungen konvergieren. Für  $X_n$  ist dies verhältnismäßig einfach, wie man später sehen wird. Jedoch läßt sich die Verteilung von  $Y_n(t)$  nicht einfach überblicken. Deshalb benutzt man, daß  $Y_n$  Lösung einer stochastischen Differentialgleichung ist; man approximiert nämlich  $Y_n$  durch einen "Streckenzug"  $Y_{n,m}$ , der konvergiert, falls  $X_n$  konvergiert.

Sei  $0 = t_{m,0} < \dots < t_{m,q_m} = 1$  eine Zerlegung von  $[0,1]$ .

Man definiert

$$Y_{n,m}(0) := Y_{n,0}; \text{ für } i = 1, \dots, q_m$$

$$Y_{n,m}(t_{m,i}) := Y_{n,m}(t_{m,i-1}) + h_n(t_{m,i-1}, X_n(t_{m,i-1}), Y_{n,m}(t_{m,i-1})) \cdot (X_n(t_{m,i}) - X_n(t_{m,i-1}))$$

$$Y_{n,m}(t) := Y_{n,m}(t_{m,i-1}) + h_n(t_{m,i-1}, X_n(t_{m,i-1}), Y_{n,m}(t_{m,i-1})) \cdot (X_n(t) - X_n(t_{m,i-1})), \quad t_{m,i-1} < t < t_{m,i}$$

Damit ergibt sich die folgende Darstellung

$$Y_{n,m}(t) = Y_{n,0} + \sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{q_m} \frac{1}{\{k_n(t_{m,i-1}) < j \leq k_n(t_{m,i})\}} \cdot h_n(t_{m,i-1}, X_n(t_{m,i-1}), Y_{n,m}(t_{m,i-1})) X_{n,j} \frac{1}{\{k_n(t) \geq j\}}$$

### 5. Lemma

Sind die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt, dann gilt für alle  $\epsilon > 0$ ,

$t \in [0,1] :$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\|Y_n(t) - Y_{n,m}(t)\| > \epsilon) = 0$$

Beweis:

Man findet die Darstellung

$$Y_n(t) - Y_{n,m}(t) = \sum_{j \geq 1} \Delta_{n,m,j-1} X_{n,j} 1_{\{k_n(t) \geq j\}}$$

$$\text{und setzt } S_r = \sum_{j=1}^r \Delta_{n,m,j-1} X_{n,j} 1_{\{k_n(t) \geq j\}}$$

und zeigt dann

$$(K.4) \quad E_{n,r-1} \|S_r\|^2 \leq \|S_{r-1}\|^2 \left(1 + \frac{1}{F_{n,r}} L''(\|X_{n,r-1}\|_1 + \|Y_{n,r-1}\|_1)\right) + \\ + \frac{1}{F_{n,r}} L''(\|X_{n,r-1}\|_1 + \|Y_{n,r-1}\|_1) .$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{q_m} 1_{\{k_n(t_{m,i-1}) < r \leq k_n(t_{m,i})\}} (\delta_m^2 + (1 + \\ + \|X_n(t_{m,i-1})\|^2 + \|Y_n(t_{m,i-1})\|^2) (\|X_{n,r-1}\|_1 + \|Y_{n,r-1}\|_1))$$

$$\lim_n E \left( \max_{i=0}^{q_m} |Y'_{n,m}(t_{m,i})|^2 \mid f_0 \right) \leq \\ \leq \exp \{8(L' + 1) (\|X\|_1 + \|Y\|_1)^2\} \text{ f.s.}$$

$$\lim_n E \left( \sup \{ \|X'_n(T_{n,j-1}) - X'_n(t_{m,r-1})\|^2 \mid t_{m,r-1} < T_{n,j} \leq t_{m,r} \} \mid f_0 \right) \leq \\ \leq (8 + 2M^2) \cdot ((\|X(t_{m,r}) - X(t_{m,r-1})\|)^2 + \|Y(t_{m,r}) - Y(t_{m,r-1})\|) \text{ f.s.}$$

Man zeigt dann ( $\Pi_{n,r}$  wie in Lemma 4)

$$E \left( \frac{\|S_r\|^2}{\Pi_{n,r}} \mid f_0 \right) \leq \sum_{l=0}^r E \left( \frac{1}{\Pi_{n,l}} \frac{1}{F_{n,l}} a_{n,l-1} b_{n,l-1} \mid f_0 \right)$$

wobei  $\sum_{l=1}^r \frac{1}{F_{n,l}} a_{n,l-1}$  beschränkt bleibt und  $\frac{1}{F_{n,l}} b_{n,l-1}$  gleichmäßig klein

wird. Ähnlich wie im Lemma 4 folgt daraus die Behauptung.

$$(K.1) \quad 1_{\{k_n(t) \geq j\}} \sum_{i=1}^{q_m} 1_{\{k_n(t_{m,i-1}) < j \leq k_n(t_{m,i})\}} = 1_{\{k_n(t) \geq j\}} \quad \forall t, j$$

Daraus folgt

$$Y_n(t) = Y_{n,0} + \sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{q_m} \frac{1}{2} \{k_n(t_{m,i-1}) \leq k_n(t_{m,i})\}$$

$$\cdot h_n(T_{n,j-1}, X_n(T_{n,j-1}), Y_n(T_{n,j-1})) X_{n,j} \frac{1}{2} \{k_n(t) \geq j\}$$

$$(K.2) \Delta_{n,m,j-1} = \sum_{i=1}^{q_m} \frac{1}{2} \{k_n(t_{m,i-1}) < j \leq k_n(t_{m,i})\} (h_n(T_{n,j-1}, X_n(T_{n,j-1}),$$

$$Y_n(T_{n,j-1})) - h_n(t_{m,i-1}, X_n(t_{m,i-1}), Y_{n,m}(t_{m,i-1})) )$$

dann ist  $\Delta_{n,m,j-1}$   $f_{n,j-1}$ -meßbar und es ist

$$Y_n(t) - Y_{n,m}(t) = \sum_{j \geq 1} \Delta_{n,m,j-1} X_{n,j} \frac{1}{2} \{k_n(t) \geq j\}$$

Sei  $\delta_m = \max_{j=1}^{q_m} (t_{m,j} - t_{m,j-1})$ . Durch Einfügen von

$h_n(t_{m,i-1}, X_n(t_{m,i-1}), Y_{n,m}(T_{n,j-1}))$  erhält man

$$\|h_n(T_{n,j-1}, X_n(T_{n,j-1}), Y_n(T_{n,j-1})) - h_n(t_{m,i-1}, X_n(t_{m,i-1}), Y_{n,m}(t_{m,i-1}))\| \leq$$

$$\leq L (|T_{n,j-1} - t_{m,i-1}| + |X_n(T_{n,j-1}) - X_n(t_{m,i-1})| + |Y_n(T_{n,j-1}) - Y_{n,m}(T_{n,j-1})| + |Y_{n,m}(T_{n,j-1}) - Y_{n,m}(t_{m,i-1})|)$$

Für  $k_n(t_{m,i-1}) < j \leq k_n(t_{m,i})$  ist  $t_{m,i-1} < T_{n,j} \leq t_{m,i}$ , also

$$Y_{n,m}(T_{n,j-1}) - Y_{n,m}(t_{m,i-1}) = h_n(t_{m,i-1}, X_n(t_{m,i-1}), Y_{n,m}(t_{m,i-1})) (X_n(T_{n,j-1}) - X_n(t_{m,i-1}))$$

Für  $T_{n,j-1} \leq t_{m,i-1} < T_{n,j}$  ist  $Y_{n,m}(T_{n,j-1}) - Y_{n,m}(t_{m,i-1}) = 0 =$

$$= h_n(t_{m,i-1}, X_n(t_{m,i-1}), Y_{n,m}(t_{m,i-1})) (X_n(T_{n,j-1}) - X_n(t_{m,i-1}))$$

Daraus ergibt sich für ein  $C'$ :

$$\|\Delta_{n,m,j-1}\| \leq \sum_{i=1}^{q_m} \frac{1}{2} \{k_n(t_{m,i-1}) < j \leq k_n(t_{m,i})\} L (\delta_m + |Y_n(T_{n,j-1}) - Y_{n,m}(T_{n,j-1})|^2 + |X_n(T_{n,j-1}) - X_n(t_{m,i-1})|^2 (1 + |X_n(t_{m,i-1})|^2 + |Y_{n,m}(t_{m,i-1})|^2))$$

Nun wählt man

$$(K.3 a) G_{n,0} \in f_{n,0}, G_{n,j} \in f_{n,j-1} \text{ für } j \geq 1, G_{n,0} \supseteq G_{n,1} \supseteq \dots$$

$$(K.3 \text{ b}) \quad F_{n,j} := G_{n,j} \cap \{k_n(t) \geq j\}$$

Damit definiert man nun

$$S_r := \sum_{j=1}^r \Delta_{n,m,j-1} X_{n,j} \frac{1}{F_{n,j}}$$

Mit  $\Delta_{n,m,j-1}$  an Stelle von  $h_{n,j-1}$  gilt wieder (J.1):

$$\begin{aligned} E_{n,r-1} \|S_r\|^2 &\leq \|S_{r-1}\|^2 (1 + \frac{1}{F_{n,r}} (\|Z_{n,r-1}\|_1 + \\ &+ \|\Delta_{n,m,r-1}\|_{\frac{1}{F_{n,r}}} (\|Z_{n,r-1}\|_1 + \|Y_{n,r-1}\|_1)) \end{aligned}$$

$$\text{Wegen } F_{n,j} = \bigcap_{i=1}^j F_{n,i} \text{ ist } X_{n,i} \frac{1}{F_{n,j}} = X_{n,i} \frac{1}{F_{n,i}} \frac{1}{F_{n,j}} \quad \forall i \leq j$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F_{n,r}} (Y_n(T_{n,r-1}) - Y_{n,m}(T_{n,r-1})) = \frac{1}{F_{n,r}} \sum_{j=1}^{r-1} \Delta_{n,m,j-1} X_{n,j} =$$

$$= \frac{1}{F_{n,r}} \sum_{j=1}^{r-1} \Delta_{n,m,j-1} X_{n,j} \frac{1}{F_{n,j}} = \frac{1}{F_{n,r}} S_{r-1}$$

$$\text{Damit wird } \|\Delta_{n,m,r-1}\|_{\frac{1}{F_{n,r}}}^2 \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{F_{n,r}} \sum_{i=1}^{q_m} \frac{1}{L^m} \{k_n(t_{m,i-1}) < r \leq k_n(t_{m,i})\}^{L'} (\delta_m^2 + \|S_{r-1}\|^2 + \\ &+ \|X_n(T_{n,j-1}) - X_n(t_{m,i-1})\|^2 (1 + \|X_n(t_{m,i-1})\|^2 + \|Y_{n,m}(t_{m,i-1})\|^2)) \end{aligned}$$

Mit (K.1) ergibt sich dann für ein  $L'' > L'$

$$\begin{aligned} (K.4) \quad E_{n,r-1} \|S_r\|^2 &\leq \|S_{r-1}\|^2 (1 + \frac{1}{F_{nr}} L'' (\|Z_{n,r-1}\|_1 + \|Y_{n,r-1}\|_1)) + \\ &+ \frac{1}{F_{n,r}} L'' (\|Z_{n,r-1}\|_1 + \|Y_{n,r-1}\|_1) \sum_{i=1}^{q_m} \frac{1}{L^m} \{k_n(t_{m,i-1}) < r \leq k_n(t_{m,i})\} \cdot \\ &\cdot (\delta_m^2 + \|X_n(T_{n,j-1}) - X_n(t_{m,i-1})\|^2 (1 + \|X_n(t_{m,i-1})\|^2 + \\ &+ \|Y_{n,m}(t_{m,i-1})\|^2)) \end{aligned}$$

(Falls  $X_n$  unabhängige Zuwächse hätte, wäre man schnell fertig: man bildet in (K.4) den Erwartungswert, zeigt leicht, daß

$$\sup_{n,t} E \|X_n(t)\|^2 < \infty \text{ und } \sup_{n,m,t} E \|Y_{n,m}(t)\|^2 < \infty \text{ ist und}$$

$$E \|X_n(t_{n,j-1}) - X_n(t_{m,i-1})\|^2 = 0 \quad (\delta_m),$$

$$E \|S_r\|^2 \leq \|S_{r-1}\|^2 (1 + a_{n,r-1}) + a_{n,r-1} \quad 0 \quad (\delta_m), \text{ damit wäre man fertig)}$$

Sei  $f_{n,-1} = f_0$ ,  $G'_{n,j} \in f_{n,j-1}$  für  $j \geq 0$ ,  $G'_{n,0} \geq G'_{n,1} \geq \dots$

$$h_{n,-1} = I, \quad h_{n,i} = h_n(t_{m,i}, X_n(t_{m,i}), Y_{n,m}(t_{m,i})), \quad i = 0, \dots, q_m$$

$$X_{n,0} = Y_{n,0}, \quad X'_{n,j} = X_{n,j} \frac{1}{G'_{n,j}} \quad \text{für } j \geq 0, \quad Y'_{n,0} = X'_{n,0},$$

Mit  $X'_{n,j}$  an Stelle von  $X_{n,j}$  definiert man nun die Prozesse

$$X'_n(\cdot), Y'_n(\cdot), Y'_{n,m}(\cdot) \text{ usw.}$$

$$S_{r,1} = Y'_{n,m}(t_{m,r}), \quad S_{r,2} = X'_n(t_{m,r}), \quad T_{-1,1} = T_{-1,2} = 0,$$

$$T_{r,1} = \max_{j=0}^r \|S_{n,r}\|^2, \quad T_{r,2} = \max_{j=0}^r \|S_{n,2}\|^2$$

Gezeigt wird nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \max_{i=0}^{q_m} \|Y'_{n,m}(t_{m,i})\|^2 \mid f_0 \right) \leq \exp \{8(L' + 1) (\mathbb{E}(1) + \mathbb{E}(1))^2\} \text{ f.s.}$$

$$\text{Sei } H'_{n,j-1} = \sum_{i=1}^{q_m} h'_{n,i-1} \frac{1}{\{k_n(t_{m,i-1}) < j \leq k_n(t_{m,i})\}}$$

(wo  $h'_{n,i} = h_n(t_{m,i}, X'_n(t_{m,i}), Y'_{n,m}(t_{m,i}))$  ist), damit ist

$$\begin{aligned} S_{r,1} &= \sum_{i=1}^r h'_{n,i-1} \frac{k_n(t_{m,i})}{k_n(t_{m,i-1})+1} X'_{n,j} + Y'_{n,0} = \\ &= Y'_{n,0} + \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} H'_{n,j-1} X'_{n,j} = \\ &= \sum_{j \geq 0} H'_{n,j-1} X'_{n,j} \frac{1}{\{k_n(t_{m,r}) \geq j\}} \end{aligned}$$

$$\text{und } \max_{1 \leq r} \|S_{r,1}\|^2 \leq \sup_{N \geq 0} \left\| \sum_{j=0}^N H'_{n,j-1} X'_{n,j} \frac{1}{\{k_n(t_{m,r}) \geq j\}} \right\|^2$$

Bemerkung

Für  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{M}^M$  ist

$$\sup_n \|A_n\|^2 \leq M^2 \sum_{i,l=1}^M \sup_n A_n^2(i,l);$$

ist  $A_n = \sum_{r=1}^n B_r \cdot C_r$ , so ist

$$\sup_u \|A_n\|^2 \leq 4M^3 \sum_{i,l,k=1}^M \sup_n \left( \sum_{r=1}^n B_r(i,k) C_r(k,l) \right)^2$$

Setzt man  $\|A\|_4 := \left( \sum_{i,k=1}^M A^4(i,k) \right)^{1/4}$ , so ist

$\|\cdot\|_4$  keine Algebrennorm, aber als Norm auf dem Vektorraum äquivalent zu  $\|\cdot\|$ , also gilt die Lipschitz-Bedingung auch mit  $\|\cdot\|_4$

Damit wird

$$T_{r,1} = \max_{l=0}^r \|S_{r,1}\|^2 \leq 4M^3 \sum_{i,l,k=1}^M \sup_{N \geq 0} \left( \sum_{j=0}^N H'_{n,j-1}(i,k) X'_{n,j}(k,l) \right)$$

$$\frac{1}{\{K_n(t_{m,r}) \geq j\}})^2 \leq 8M^3 \sum_{i,l,k=1}^M \sup_{N \geq 0} \left( \sum_{j=0}^N H'_{n,j-1}(i,k) (X'_{n,j}(k,l) - \right.$$

$$\left. - E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l) \right) \frac{1}{\{K_n(t_{m,r}) \geq j\}})^2 + 8M^3 \sum_{i,l,k=1}^M \sup_{N \geq 0}$$

$$\left( \sum_{j=0}^N H'_{n,j-1}(i,k) E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l) \right) \frac{1}{\{K_n(t_{m,r}) \geq j\}})^2$$

Durch Wahl von  $H'_{n,j-1} = I$  erhält man die entsprechende Ungleichung für  $T_{r,2}$ , also

(K.5)

$$E(T_{r,1} | f_0) \leq 8M^3 \sum_{i,l,k=1}^M E \left( \sup_{N \geq 0} \sum_{j=0}^N H'_{n,j-1}(i,k) (X'_{n,j}(k,l) - \right.$$

$$\left. - E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l) \right) \frac{1}{\{K_n(t_{m,r}) \geq j\}}^2 | f_0) +$$

$$+ 8M^3 \sum_{i,l,k=1}^M E \left( \left( \frac{K_n(t_{m,r})}{\sum_{j=0}^N} \right) | H'_{n,j-1}(i,k) \right).$$

$$\cdot \left| E_{n,j-1} X'_{n,j} (k,l) \right|^2 \mid f_0)$$

$$E (T_{r,2} \mid f_0) \leq 2 M^2 \sum_{i,l=1}^M$$

$$E \left( \sup_{N \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^N (X'_{n,j} (i,l) - E_{n,j-1} X'_{n,j} (i,l)) \frac{1}{\{K_n(t_{m,r}) \geq j\}} \right\}^2 \mid f_0 \right) +$$

$$+ 2 M^2 \sum_{i,l=1}^M E \left( \left( \sum_{j=0}^{K_n(t_{m,r})} \left| E_{n,j-1} X'_{n,j} (i,l) \right| \right)^2 \mid f_0 \right)$$

Man benötigt nun die Ungleichung aus

#### A. 2 Satz

Ist  $(M_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein positives Submartingal,  $\sup E M_n^2 < \infty$ ,  $f_0 \leq f_1$ , dann gilt:

Es gibt ein integrierbares  $M_\infty$  mit  $M_n \rightarrow M_\infty$  f.s. und

$$E \left( \sup_n M_n^2 \mid f_0 \right) \leq 4 E (M_\infty^2 \mid f_0) \leq 4 \sup_n E (M_n^2 \mid f_0) \text{ f.s.}$$

$$V_{q,r,1} := S_{r-1,1} + \sum_{j=0}^q H'_{n,j-1} X'_{n,j} \frac{1}{\{K_n(t_{m,r-1}) < j \leq K_n(t_{m,r})\}}$$

$$V_{q,r,2} := S_{r-1,2} + \sum_{j=0}^q X'_{n,j} \frac{1}{\{K_n(t_{m,r-1}) < j \leq K_n(t_{m,r})\}}$$

$$\left| h'_{n,i-1} \right| \leq \sup_n \left| h_n (0,0,0) \right| + L (t_{m,i-1} +$$

$$+ \left| X'_n (t_{m,i-1}) \right| + \left| Y'_{n,m} (t_{m,i-1}) \right| =$$

$$= \sup_n \left| h_n (0,0,0) \right| + L (t_{m,i-1} + \left| S_{i-1,2} \right| + \left| S_{i-1,1} \right|) \Rightarrow$$

$$\left| h'_{n,i-1} \right|^2 \leq \left| H'_{n,i-1} \right|^2 L' (1 + T_{i-1,1} + T_{i-1,2}) \Rightarrow \left| H'_{n,r-1} \right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^q L' (1 + T_{i-1,1} + T_{i-1,2}) \frac{1}{\{K_n(t_{m,i-1}) < r \leq K_n(t_{m,i})\}}$$

Setzt man nun

$$M_N = \left| \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} H'_{n,j-1}(i,k) (X'_{n,j}(k,l) - E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l)) \right| \mathbb{1}_{\{k_n(t_{m,r}) \geq j\}}$$

so ist  $(M_N, f_{n,N})_{N \geq 0}$  ein positives Submartingal; außerdem (wegen Voraussetzung 1) ist  $|M_N| \leq a_n C' \forall N$  also insbesondere  $E M_N^2 \leq (a_n C')^2$ .

Nach dem oben zitierten Satz ist dann

$$M_\infty = \left| \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} H'_{n,j-1}(i,k) (X'_{n,j}(k,l) - E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l)) \right|$$

und, da Martingaldifferenzen summiert werden,

$$E \left( \sup_{N \geq 0} \left| \sum_{j=0}^N H'_{n,j-1}(i,k) (X'_{n,j}(k,l) - E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l)) \right| \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2} \{ K_n(t_{m,r}) \geq j \}^2 \mid f_0) \leq 4 E \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} H'^2_{n,j-1}(i,k) E_{n,j-1} (X'_{n,j}(k,l) - E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l))^2 \mid f_0 \right) \text{ f.s.}$$

Summation über  $i, k, l$  liefert

$$\sum_{i,k,l=1}^M E \left( \sup_{N \geq 0} \left| \sum_{j=0}^N H'_{n,j-1}(i,k) (X'_{n,j}(k,l) - E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l)) \right| \right) \cdot$$

$$\frac{1}{2} \{ K_n(t_{m,r}) \geq j \}^2 \mid f_0) \leq 4 E \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} \sum_{i,k=1}^M H'^2_{n,j-1} \sum_{p,l=1}^M$$

$$E_{n,j-1} X'^2_{n,j}(p,l) \mid f_0)$$

$$= 4 E \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} \left\| H'_{n,j-1} \right\|^2 \left\| Y'_{m,j-1} \right\|_1 \mid f_0 \right) \leq 4 L^1 E \left( \sum_{i=0}^r$$

$$(1 + T_{i-1,2} + T_{i-1,2}) \sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} \left\| Y'_{n,j-1} \right\|_1 \mid f_0 \right); \sum_{i,k,l=1}^M$$

$$E \left( \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} \left| H'_{n,j-1}(i,k) \right| \left| E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l) \right| \right)^2 \mid f_0 \right) \leq$$

$$\leq E \left( \sum_{i,k,l=1}^M \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} H'^2_{m,j-1}(i,k) \left| E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l) \right| \right) \right) \cdot$$



$$\begin{aligned}
 & \cdot \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} \left| E_{n,j-1} X'_{n,j}(k,l) \right| \right) \left| f_0 \right| \leq E \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} \left| H'_{n,j-1} \right|^2 \right) \\
 & \cdot \left\| X'_{n,j-1} \right\|_1 \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} \left\| X'_{n,j-1} \right\|_1 \right) \left| f_0 \right| \\
 & \leq L' E \left( \sum_{i=0}^r (1 + R_{i-1,1} + T_{i-1,2}) \sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} \left\| X'_{n,j-1} \right\|_1 \right) \\
 & \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_{m,r})} \left\| X'_{n,j-1} \right\|_1 \right) \left| f_0 \right|
 \end{aligned}$$

Damit ist die rechte Seite der ersten Ungleichung in (K.5) abgeschätzt, analog verfährt man mit der rechten Seite der zweiten Ungleichung in (K.5) und erhält dann insgesamt

(K.6)

$$\begin{aligned}
 E \left( T_{r,1} + T_{r,2} \mid f_0 \right) & \leq E \left( \sum_{i=0}^r (2 + T_{i-1,1} + T_{i-1,2}) (4 L' + 4) \right. \\
 & \left. \sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} (\left\| Y'_{n,j-1} \right\|_1 + \left\| X'_{n,j-1} \right\|_1 \sum_{e=0}^{k_n(t_{m,r})} \left\| X'_{n,e-1} \right\|_1) \mid f_0 \right)
 \end{aligned}$$

Da man später den  $\lim$  betrachtet, muß man zeigen, daß höhere Momente für die  $T_{i,j}$  existieren, speziell ist hinreichend

(K.9)

$$E (T_{i,1}^2 + T_{i,2}^2 \mid f_0) \leq L_2 (q_m + 1)^2 \exp \{ L_1'' (1 + E(1) + Y(1)) \} \quad \forall i$$

Beweis von (K.9)

Sei  $X''_{n,j} = X'_{n,j} \cdot 1_{\{k_n(t_{m,r-1}) < j \leq k_n(t_{m,r})\}}$ , dann ist (s.o.)

$$\begin{aligned}
 V_{q,r,1} & = V_{q-1,r,1} + H'_{n,q-1} X''_{n,q} \Rightarrow V_{q,r,1}^4(i,l) \leq V_{q-1,r,1}^4(i,l) + \\
 & + 4 V_{q-1,r,1}^3(i,l) \sum_{k=1}^M H'_{n,q-1}(i,k) X''_{n,q}(k,l) + 14 V_{q-1,r,1}^2(i,l) \\
 & \left( \sum_{k=1}^M H'_{n,q-1}(i,k) X''_{n,q}(k,l) \right)^2 + 9 \left( \sum_{k=1}^M H'_{n,l-1}(i,k) X''_{n,q}(k,l) \right)^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{n,q-1} v_{q,r,1}^4(i,1) &\leq v_{q-1,r,1}^4(i,1) + 4 \sum_{k=1}^M |v_{q-1,r,1}^3(i,1)| |H'_{n,q-1}(i,k)| \\
 &+ |E_{n,q-1} x''_{n,q}(k,1)| + 14 v_{q-1,r,1}^2(i,1) E_{n,q-1} \left( \sum_{k=1}^M H'_{n,q-1}(i,k) x''_{n,q}(k,1) \right)^2 \\
 &\leq v_{q-1,r,1}^4(i,1) (1 + 24 \sum_{k=1}^M |E_{n,q-1} x''_{n,q}(k,1)| + \\
 &+ 28 \sum_{k=1}^M E_{n,q-1} x''_{n,q}{}^2(k,1)) + 16 \sum_{k=1}^M H_{n,q-1}'^4(i,k) |E_{n,q-1} x''_{n,q}(k,1)| + \\
 &+ \left( \sum_{k=1}^M H_{n,q-1}'^2(i,k) \right)^2 (28 \sum_{k=1}^M E_{n,q-1} x''_{n,q}{}^2(k,1) + 9 E_{n,q-1} \\
 &\left( \sum_{k=1}^M x''_{n,q}{}^2(k,1) \right)^2) \leq v_{q-1,r,1}^4(i,1) (1 + 24 \|x''_{n,q-1}\|_1 + \\
 &+ 28 \|y''_{n,q-1}\|_1) + \sum_{k=1}^M H_{n,q-1}'^4(i,k) (16 + 28 M^2 + 9 M^2 C^2) \\
 &\left( \sum_{k=1}^M |E_{n,q-1} x''_{n,q}(k,1)| + \sum_{k=1}^M E_{n,q-1} x''_{n,q}{}^2(k,1) \right)
 \end{aligned}$$

Summation über  $i$  und  $l$  liefert

$$\begin{aligned}
 E_{n,q-1} \|v_{q,r,1}\|_4^4 &\leq \|v_{q-1,r,1}\|_4^4 (1 + 24 \|x''_{n,q-1}\|_1 + \\
 &+ 28 \|y''_{n,q-1}\|_1) + \|H'_{n,q-1}\|_4^4 (16 + 28 M^2 + 9 M^2 C^2) \\
 &(\|x''_{n,q-1}\|_1 + \|y''_{n,q-1}\|_1)
 \end{aligned}$$

analog zeigt man

$$\begin{aligned}
 E_{n,q-1} \|v_{q,r,2}\|_4^4 &\leq \|v_{q-1,r,2}\|_4^4 (1 + 6 \|x''_{n,q-1}\|_1 + 28 \|y''_{n,q-1}\|_1) + \\
 &+ (4 + 28 + 9 C^2) (\|x''_{n,q-1}\|_1 + \|y''_{n,q-1}\|_1)
 \end{aligned}$$

Indem man  $h_n(0,0,0)$  ergänzt, erhält man mit der Lipschitz-Bedingung für  $\|\cdot\|_4$  die Abschätzung

$$\|H'_{n,q-1}\|_4^4 \leq \prod_{i=0}^q L_1' (1 + S_{i-1,1} \| \cdot \|_4^4 + S_{i-1,2} \| \cdot \|_4^4) \cdot 1_{\{k_n(t_{n,i-1}) < q \leq k_n(t_{n,i})\}}$$

Aus der Definition von  $X_{n,j}''$  ergibt sich, daß in  $Z_{n,q-1}''$  und  $Y_{n,q-1}''$  der Faktor  $1_{\{k_n(t_{m,r-1}) < q \leq k_n(t_{m,r})\}}$  steckt; da in den relevanten

Ungleichungen stets  $H'_{n,q-1}$  mit  $(\|Z_{n,q-1}''\|_1 + \|Y_{n,q-1}''\|_1)$  multipliziert wird, bleibt in der obigen Summe nur der Summand  $i = r$  übrig:

$$\|H'_{n,q-1}\|_4^4 1_{\{k_n(t_{m,r-1}) < q \leq k_n(t_{m,r})\}} \leq L_1 (1 + S_{r-1,1} \| \cdot \|_4^4 + S_{r-1,2} \| \cdot \|_4^4) 1_{\{k_n(t_{m,r-1}) < q \leq k_n(t_{m,r})\}}$$

Man erhält also für ein  $L_1''$

$$\begin{aligned} E_{n,q-1} (\|V_{q,r,1}\|_4^4 + \|V_{q,r,2}\|_4^4) &\leq \\ &\leq (\|V_{q-1,r,1}\|_4^4 + \|V_{q-1,r,2}\|_4^4) (1 + L_1'' (\|Z_{n,q-1}''\|_1 + \|Y_{n,q-1}''\|_1)) + \\ &+ L_1'' (1 + S_{r-1,1} \| \cdot \|_4^4 + S_{r-1,2} \| \cdot \|_4^4) (\|Z_{n,q-1}''\|_1 + \|Y_{n,q-1}''\|_1) \end{aligned}$$

Man setzt nun

$$a_{n,r,q-1} := L_1'' (\|Z'_{n,q-1}\|_1 + \|Y'_{n,q-1}\|_1) 1_{\{k_n(t_{m,r-1}) < q \leq k_n(t_{m,r})\}}$$

$$\Pi_{n,r} := \prod_{j=0}^r \prod_{q \geq 0} (1 + a_{n,j,q-1})$$

dann ist  $a_{n,r,q-1} = L_1'' (\|Z'_{n,q-1}\|_1 + \|Y'_{n,q-1}\|_1)$  und

$$\Pi_{n,r} = \prod_{q=0}^{(k_n(t_{m,r}))} (1 + L_1'' (\|Z'_{n,q-1}\|_1 + \|Y'_{n,q-1}\|_1))$$

Damit wird dann

$$E \left( \frac{\|v_{q,r,1}\|_4^4 + \|v_{q,r,2}\|_4^4}{\prod_{j=0}^q (1 + a_{n,r,q-1})} \mid f_{n,k_n}(t_{m,r-1}) \right) \leq$$

$$\leq (1 + \|s_{r-1,1}\|_4^4 + \|s_{r-1,2}\|_4^4) \sum_{j=0}^q E \left( \frac{a_{n,r,j-1}}{\prod_{l=0}^j (1 + a_{n,r,l-1})} \mid f_{n,k_n}(t_{m,r-1}) \right)$$

$$\sum_{j=0}^q \frac{a_{n,r,j-1}}{\prod_{l=0}^j (1 + a_{n,r,l-1})} = 1 - \frac{1}{\prod_{l=0}^q (1 + a_{n,r,l-1})} \leq 1 \vee q$$

für  $q \rightarrow \infty$  ergibt sich damit (und dem Lemma von Fatou)

$$E \left( \frac{\|s_{r,1}\|_4^4 + \|s_{r,2}\|_4^4}{\prod_{j \geq 0} (1 + a_{n,r,j-1})} \mid f_{n,k_n}(t_{m,r-1}) \right) \leq 1 + \|s_{r-1,1}\|_4^4 + \|s_{r-1,2}\|_4^4$$

Indem man nun schrittweise fortfährt, ergibt sich

$$E \left( \frac{\|s_{r,1}\|_4^4 + \|s_{r,2}\|_4^4}{\prod_{n,r}} \mid f_0 \right) \leq \sum_{j=0}^r E \left( \frac{1}{\prod_{n,j}} \mid f_0 \right) \leq r + 1$$

Definiert man nun die Mengen  $G'_{n,j}$  durch

$$G'_{n,j} := \left\{ \sum_{q=0}^j \left( \|x_{n,q-1}\|_1 + \|y_{n,q-1}\|_1 \right) \mid \{k_n(1) \geq q\} \right\}$$

$$\leq 1 + \|x(1)\|_1 + \|y(1)\|_1$$

so ergibt sich

$$1 \leq \prod_{n,r} \leq \exp \left\{ \sum_{j=0}^r \sum_{q \geq 0} a_{n,j,q-1} \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \sum_{q=0}^{k(t_{m,r})} L_1^n \left( \|x'_{n,q-1}\|_1 + \|y'_{n,q-1}\|_1 \right) \right\} \leq$$

$$\leq \exp \left\{ L_1^n (1 + \|x(1)\|_1 + \|y(1)\|_1) \right\}$$

und damit

$$E \left( \|s_{r,1}\|_4^4 + \|s_{r,2}\|_4^4 \mid f_0 \right) \leq (r + 1) \exp \left\{ L_1^n (1 + \|x(1)\|_1 + \|y(1)\|_1) \right\}$$

$$\text{Nun ist } T_{i,1} = \max_{j=0}^i \| S_{j,1} \|^2, \quad T_{i,2} = \max_{j=0}^i \| S_{j,2} \|^2,$$

also ergibt es ein  $L_2$  mit

$$T_{i,1}^2 \leq L_2 \sum_{j=0}^i \| S_{j,1} \|^4, \quad T_{i,2}^2 \leq L_2 \sum_{j=0}^i \| S_{j,2} \|^4,$$

$$E (T_{i,1}^2 + T_{i,2}^2 \mid f_0) \leq$$

$$\leq L_2 (q_m + 1) \cdot i \cdot \exp \{ L_1'' (1 + \mathcal{E}(1) + \mathcal{Y}(1)) \}$$

und damit (K.9).

Bisher wurde  $n$  festgehalten, nun schreibt man

$$T_{i,1}^{(n)} \text{ und } T_{i,2}^{(n)}, \text{ also gilt}$$

(K. 7)

$$E (T_{r,1}^{(n)} + T_{r,2}^{(n)} \mid f_0) \leq E \left( \sum_{i=0}^r (2 + T_{i-1,1}^{(n)} + T_{i-1,2}^{(n)}) (4 L' + 4) \right)$$

$$\sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} (\| \mathcal{Y}'_{n,j-1} \|_1 + \| \mathcal{Z}'_{n,j-1} \|_1 \frac{k_n(t_{m,r})}{\sum_{l=0}^{k_n(t_{m,r})}} \| \mathcal{Z}'_{n,l-1} \|_1) \mid f_0) \text{ f.s.}$$

$$E (T_{r,1}^{(n)^2} + T_{r,2}^{(n)^2} \mid f_0) \leq L_2 (q_m + 1)^2 \exp \{ L_1'' (1 + \mathcal{E}(19) + \mathcal{Y}(1)) \} \text{ f.s.}$$

$$\sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} (\| \mathcal{Y}_{n,j-1} \|_1 + \| \mathcal{Z}_{n,j-1} \|_1 \frac{k_n(t_{m,r})}{\sum_{l=0}^{k_n(t_{m,r})}} \| \mathcal{Z}_{n,l-1} \|_1) \geq$$

$$\sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} (\| \mathcal{Y}'_{n,j-1} \|_1 + \| \mathcal{Z}'_{n,j-1} \|_1 \frac{k_n(t_{m,r})}{\sum_{l=0}^{k_n(t_{m,r})}} \| \mathcal{Z}'_{n,l-1} \|_1) \geq$$

$$\geq \sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} (\| \mathcal{Y}_{n,j-1} \|_1 + \| \mathcal{Z}_{n,j-1} \|_1 \frac{k_n(t_{m,r})}{\sum_{l=0}^{k_n(t_{m,r})}} \| \mathcal{Z}_{n,l-1} \|_1) \cdot$$

$$\cdot \prod_{q=0}^{k_n(t_{m,r})} \frac{1}{G'_{n,q}}$$

Setzt man nun

$$b_n := \frac{k_n(t_{m,i})}{j=k_n(t_{m,i-1})+1} (|y'_{n,j-1}|_1 + |z'_{n,j-1}|_1 \frac{k_n(t_{m,r})}{l=0} |z'_{n,l-1}|_1) ,$$

$$b_o := y(t_{m,i}) - y(t_{m,i-1}) + (z(t_{m,i}) - z(t_{m,i-1})) z(t_{m,r})$$

$$\bar{b}_o := (y(1) + z(1) + 1)^2, \text{ so folgt mit der obigen Ungleichung,}$$

$$\text{mit } \frac{k_n(t_{m,r})}{q=0} \frac{1}{G_{n,q}} \rightarrow 1 \text{ f.s. und}$$

mit Voraussetzung 1:

$$(*) \quad b_n \rightarrow b_o \text{ f.s. und } b_n \leq \bar{b}_o.$$

Angenommen, es gibt eine Menge  $\Omega_1$  und  $\delta$ ,  $\delta_1 > 0$  mit  $P(\Omega_1) > \delta_1$  und

$$\lim_n E((2 + T_{i-1,1}^{(n)} + T_{i-1,2}^{(n)}) (b_n - b_o) \mid f_o) > \delta \text{ auf } \Omega_1;$$

dann ist  $\Omega_1 \in f_o$ ;

$$\delta^2 \frac{1}{\Omega_1} \leq \lim_n E((2 + T_{i-1,1}^{(n)} + T_{i-1,2}^{(n)}) (b_n - b_o) \frac{1}{\Omega_1} \mid f_o) \leq$$

$$\leq \lim_n (E((2 + T_{i-1,1}^{(n)} + T_{i-1,2}^{(n)})^2 \mid f_o))^{1/2}$$

$$\lim_n (E((b_n - b_o)^2 \frac{1}{\Omega_1} \mid f_o))^{1/2} \leq$$

$$\leq 16 (4 + L_2 (q_m + 1)^2 \exp(L_1^n (1 + z(1) + \#(2)))^{1/2}$$

$$\frac{1}{\Omega_1} \lim_n (E(b_n - b_o)^2 \mid f_o))^{1/2} = 0 \text{ f.s.}$$

nach (\*), das ist aber ein Widerspruch zu  $P(\Omega_1) > 0$ ,

$$\text{also: } \lim_n E((2 + T_{i-1,1}^{(n)} + T_{i-1,2}^{(n)}) (b_n - b_o) \mid f_o) \leq 0$$

$$\text{damit ist dann } \lim_n E((2 + T_{i-1,1}^{(n)} + T_{i-1,2}^{(n)}) b_n \mid f_o) \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_n E (2 + T_{i-1,1}^{(n)} + T_{i-1,2}^{(n)} \mid f_0) b_0,$$

setzt man dies in (K.7) ein, so ergibt sich

$$\overline{\lim}_n E (T_{r,1}^{(n)} + T_{r,2}^{(n)} \mid f_0) \leq$$

$$\leq (4 L' + 4) \sum_{i=0}^r (2 + \overline{\lim}_n E (T_{r-1,1}^{(n)} + T_{r-1,2}^{(n)} \mid f_0))$$

$$(\mathcal{Y}(t_{m,i}) - \mathcal{Y}(t_{m,i-1}) + (\mathcal{Z}(t_{m,i}) - \mathcal{Z}(t_{mi-1})) \mathcal{Z}(t_{m,r}))$$

$$\text{sei nun } a_r := \overline{\lim}_n E (T_{r,1}^{(n)} + T_{r,1}^{(n)} \mid f_0) \text{ und}$$

$$b_r := (8 L' + 8) (\mathcal{Z}(1) + 1) (\mathcal{Y}(t_{m,r}) - \mathcal{Y}(t_{m,r-1}) + \mathcal{Z}(t_{m,r}) - \mathcal{Z}(t_{m,r-1})),$$

$$a_{-1} := 0, \text{ dann ist für alle } r$$

$$a_r \leq \sum_{i=0}^r (1 + a_{i-1}) b_i \Rightarrow a_i \leq \prod_{j=0}^i (1 + b_j) - 1 \quad \forall i$$

$$\text{und damit } a_{q_m} \leq \exp \left\{ \sum_{j=0}^{q_m} b_j \right\} \text{ d.h.}$$

$$\overline{\lim}_n E \left( \max_{i=0}^{q_m} \left| Y'_{n,m}(t_{n,m}) \right|^2 \mid f_0 \right) \leq$$

$$\leq \exp \{ 8 (L' + 1) (\mathcal{Z}(1) + \mathcal{Y}(1) + 1)^2 \}$$

$$\leq \exp \{ 8 (L'' + 1) (\mathcal{Z}(1) + \mathcal{Y}(1))^2 \}$$

Man zeigt nun (\*\*):

$$\overline{\lim}_n E (\sup \{ \left| X'_n(T_{n,j-1}) - X'_n(t_{m,i-1}) \right|^2 \mid t_{m,i-1} < T_{n,j} \leq t_{m,i} \} \mid f_0) \leq$$

$$\leq (8 + 2M^2) ((\mathcal{Z}(t_{m,r}) - \mathcal{Z}(t_{m,r-1}))^2 + \mathcal{Y}(t_{m,r}) - \mathcal{Y}(t_{m,r-1}))$$

Dazu setzt man (zunächst wieder n fest).

$$V_{q,r,3}^{(n)} := \sum_{j=1}^q X'_{n,j} \mathbb{1}_{\{k_n(t_{m,r-1}) < j \leq k_n(t_{m,r})\}}$$

Dann ist  $\sup_q \left| v_{q,r,3}^{(n)} \right|^2 \leq$

$$\leq \sup_q \left| \sum_{j=1}^q (X'_{n,j} - E_{n,j-1} X'_{n,j}) \frac{1}{\{K_n(t_{m,r-1}) < j \leq K_n(t_{m,r})\}} \right|^2 +$$

$$+ 2 \left( \sum_{j=K_n(t_{m,r-1})+1}^{K_n(t_{m,r})} \left| E_{n,j-1} X'_{n,j} \right| \right)^2$$

$$\left| E_{n,j-1} X'_{n,j} \right|^2 = \sum_{i,l=1}^M (E_{n,j-1} X'_{n,j}(i,l))^2 \leq$$

$$\leq M^2 \left( \sum_{i,l=1}^M \left| E_{n,j-1} X'_{n,j}(i,l) \right| \right)^2 = M^2 \left\| E'_{n,j-1} \right\|_1^2, \text{ also}$$

$$\sum_{j=K_n(t_{m,r-1})+1}^{K_n(t_{m,r})} \left| E_{n,j-1} X'_{n,j} \right| \leq \sum_{j=K_n(t_{m,r-1})+1}^{K_n(t_{m,r})} M \cdot \left\| E'_{n,j-1} \right\|_1$$

Setzt man  $M_q = \left( \sum_{j=1}^q (X'_{n,j}(i,l) - E_{n,j-1} X'_{n,j}(i,l)) \right) \cdot$

$$1_{\{K_n(t_{m,r-1}) < j \leq K_n(t_{m,r})\}}^2$$

so ist  $(M_q, f_{n,q})$  ein positives Submartingal, beschränkt durch  $2 C^2 a_n$ ,

aus der Martingal-Ungleichung (Satz A.2) folgt:

$$E \left( \sup_q M_q \mid f_0 \right) \leq 4 E (M_\infty \mid f_0) \text{ oder}$$

$$E \left( \sup_q \left\{ \left( \sum_{j=1}^q (X'_{n,j}(i,l) - E_{n,j-1} X'_{n,j}(i,l)) \frac{1}{\{K_n(t_{m,r-1}) < j \leq K_n(t_{m,r})\}} \right)^2 \mid f_0 \right\} \right)$$

$$\leq 4 E \left( \left( \sum_{j=K_n(t_{m,r-1})+1}^{K_n(t_{m,r})} (X'_{n,j}(i,l) - E_{n,j-1} X'_{n,j}(i,l)) \right)^2 \mid f_0 \right) \leq$$

$$\leq 4 E \left( \sum_{j=K_n(t_{m,r-1})+1}^{K_n(t_{m,r})} E_{n,j-1} X_{n,j}^2(i,l) \mid f_0 \right)$$

Summation über  $i$  und  $l$  liefert

$$E \left( \sup_q \left| \sum_{j=1}^q (X'_{n,j} - E_{n,j-1} X'_{n,j}) \frac{1}{\{K_n(t_{m,r-1}) < j \leq K_n(t_{m,r})\}} \right|^2 \mid f_0 \right) \leq$$



$$\leq 4 E \left( \sum_{j=k_n(t_{m,r-1})+1}^{k_n(t_{m,r})} \| y'_{n,j-1} \|_1 \mid f_0 \right) \text{ und damit ist}$$

$$E \left( \sup_q^{(n)} V_{q,r,3} \mid f_0 \right) \leq 8 E \left( \sum_{j=k_n(t_{m,r-1})+1}^{k_n(t_{m,r})} \| y'_{n,j-1} \|_1 \mid f_0 \right) +$$

$$+ 2 M^2 E \left( \left( \sum_{j=k_n(t_{m,r-1})+1}^{k_n(t_{m,r-1})} \| y'_{n,j-1} \|_1^2 \mid f_0 \right) \right)$$

Da die Summen in den bedingten Erwartungswertklammern durch

$\mathcal{Y}(1) + \mathcal{Z}(1) + 1$  bzw.  $(\mathcal{Y}(1) + \mathcal{Z}(1) + 1)^2$  beschränkt sind

(Definition der  $G'_{n,j}$ ), so gilt mit Voraussetzung 1

$$\lim_n E \left( \sup_q^{(n)} V_{q,r,3} \mid f_0 \right) \leq$$

$$\leq 8 (\mathcal{Y}(t_{m,r}) - \mathcal{Y}(t_{m,r-1})) + 2M^2 (\mathcal{Z}(t_{m,r}) - \mathcal{Z}(t_{m,r-1}))^2.$$

Da andererseits

$$\sup_q^{(n)} \| y_{q,r,3} \|^2 = \sup_q \left\{ \left\| \sum_{j=1}^q x'_{n,j} \mathbb{1}_{\{k_n(t_{m,r-1}) < j \leq k_n(t_{m,r})\}} \right\|^2 \right\}$$

$$= \sup \left\{ \| x'_n(T_{n,j-1}) - x'_n(t_{m,r-1}) \|^2 \mid t_{m,r-1} < T_{n,j} \leq t_{m,r} \right\},$$

folgt die obige Ungleichung (\*\*)

Man definiert nun

$$b_{n,1-1} := \sum_{i=1}^{q_m} \mathbb{1}_{\{k_n(t_{m,i-1}) < 1 \leq k_n(t_{m,i})\}} (\delta_m^2 + \| x_n(T_{n,1-1}) - x_n(t_{m,i-1}) \|^2)$$

$$(1 + \| x_n(t_{m,i-1}) \|^2 + \| y_{n,m}(t_{m,i-1}) \|^2)$$

$$a_{n,1-1} := L^*(\| z_{n,1-1} \|_1 + \| y_{n,1-1} \|_1) \mathbb{1}_{\{K_n(t) \geq 1\}}$$

und damit zu vorgegebenem  $\delta > 0$ ,  $G_{n,j} = G_{n,j}(\delta)$  durch

$$G_{n,j}(\delta) := G'_{n,j} \cap \left\{ \sum_{l=0}^j a_{n,1-1} b_{n,1-1} \leq \delta \right\}, \text{ dann ist (K.3) erfüllt}$$

und (K.4) hat die Form  $(F_{n,r} = F_{n,r}(\delta))$

$$E_{n,r-1} |s_r|^2 \leq |s_{r-1}|^2 (1 + \frac{1}{F_{n,r}} a_{n,r-1}) + \frac{1}{F_{n,r}} a_{n,r-1} b_{n,r-1}$$

Setzt man nun  $\Pi_{n,r} := \prod_{l=0}^r (1 + \frac{1}{F_{n,l}} a_{n,l-1})$ , so folgt mit  $G_{n,1} \leq G'_{n,1}$ :

$$\frac{1}{F_{n,1}} |x_{n,1-1}|_1 = \frac{1}{F_{n,1}} |x'_{n,1-1}|_1 \text{ und}$$

$$\frac{1}{F_{n,1}} |y_{n,1-1}|_1 = \frac{1}{F_{n,1}} |y'_{n,1-1}|_1,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &\leq \Pi_{n,r} \leq \exp \left\{ \sum_{l=0}^r \frac{1}{F_{n,l}} a_{n,l-1} \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{l=0}^r L'' \left( |x_{n,l-1}|_1 + |y_{n,l-1}|_1 \right) \frac{1}{F_{n,l}} \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{l=0}^r L'' \left( |x'_{n,l-1}|_1 + |y'_{n,l-1}|_1 \right) \frac{1}{F_{n,l}} \right\} \leq \\ &= \exp \left\{ L'' \left( 1 + \varphi(1) + \psi(1) \right) \right\} \end{aligned}$$

Damit ist

$$E_{n,r-1} \frac{|s_r|^2}{\Pi_{n,r}} \leq \frac{|s_{r-1}|^2}{\Pi_{n,r-1}} + \frac{1}{\Pi_{n,r}} \frac{1}{F_{n,r}} a_{n,r-1} b_{n,r-1}$$

und durch Induktion

$$\begin{aligned} E \left( \frac{|s_r|^2}{\Pi_{n,r}} \mid f_0 \right) &\leq \sum_{l=0}^r E \left( \frac{1}{\Pi_{n,l}} \frac{1}{F_{n,l}} a_{n,l-1} b_{n,l-1} \mid f_0 \right) \\ &\leq E \left( \sum_{l=0}^r \frac{1}{F_{n,l}} a_{n,l-1} b_{n,l-1} \mid f_0 \right) \leq \delta \end{aligned}$$

nach Definition der  $F_{n,1}$ , damit wird aber dann

$$E(|s_r|^2 \mid f_0) \leq \delta \exp \left\{ L'' \left( 1 + \varphi(1) + \psi(1) \right) \right\}$$

und mit dem Lemma von Fatou, da

$$\begin{aligned} \lim_r |s_r|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{n,m,j-1} x_{n,j} \frac{1}{F_{n,j}} = \\ &= \sum_{j=1}^{k(t)} \Delta_{n,m,j-1} x_{n,j} \frac{1}{G_{n,j}} \text{ ist:} \end{aligned}$$

$$E \left( \left\| \sum_{j=1}^{K(t)} \Delta_{n,m,j-1} X_{n,j} \frac{1}{G_{n,j}} \right\|^2 \mid f_0 \right) \leq \\ \leq \delta \exp \{ L'' (1 + Z(1) + Y(1)) \}$$

Sei also  $\Delta_{n,m}(t) := \sum_{j=1}^{K(t)} \Delta_{n,m,j-1} X_{n,j} \frac{1}{G_{n,j}}$ , dann ist wegen

$$\overline{\lim}_n P \left( \left\| \Delta_{n,m}(t) \right\| > \varepsilon \right) \leq E \overline{\lim}_n P \left( \left\| \Delta_{n,m}(t) \right\| > \varepsilon \mid f_0 \right) \leq \\ \leq \eta_1 + E \overline{1}_{\left\{ \overline{\lim}_n P \left( \left\| \Delta_{n,m}(t) \right\| > \varepsilon \mid f_0 \right) > \eta_1 \right\}} = \\ = \eta_1 + P \left( \overline{\lim}_n P \left( \left\| \Delta_{n,m}(t) \right\| > \varepsilon \mid f_0 \right) > \eta_1 \right) \\ \leq \eta_1 + P \left( \overline{\lim}_n E \left( \left\| \Delta_{n,m}(t) \right\|^2 \mid f_0 \right) > \eta_1 \varepsilon^2 \right) \leq \\ \leq \eta_1 + P \left( \exp \{ L'' (1 + Y(1) + Z(1)) \} > \frac{\eta_1 \varepsilon^2}{\delta} \right)$$

Nach Definition von  $\Delta_{n,m}(t)$  ist also

$$\{ Y_n(t) - Y_{n,m}(t) \neq \Delta_{n,m}(t) \} \subseteq \Omega \setminus \left\{ \bigcap_{j \geq 0} G_{n,j} \right\}, \text{ also}$$

$$\overline{\lim}_n P \left( \left\| Y_n(t) - Y_{n,m}(t) \right\| > \varepsilon \right) \leq \\ \leq \eta_1 + P \left( \exp \{ L'' (1 + Y(1) + Z(1)) \} > \frac{\eta_1 \varepsilon^2}{\delta} \right) + \\ + \lim_n P \left( \Omega \setminus \left\{ \bigcap_{j \geq 0} G_{n,j} \right\} \mid \forall m \right)$$

sei also  $\varepsilon, \eta > 0$  vorgegeben, wähle  $\eta_1 = \eta$  und  $\delta$  so klein, daß

$$P \left( \exp \{ L'' (1 + Z(1) + Y(1)) \} > \frac{\eta_1 \varepsilon^2}{\delta} \right) \leq \eta \text{ ist,}$$

dann gilt:

$$\overline{\lim}_n P \left( \left\| Y_n(t) - Y_{n,m}(t) \right\| > \varepsilon \right) \leq 2\eta + \lim_n P \left( \Omega \setminus \left\{ \bigcap_{j \geq 0} G_{n,j} \right\} \mid \forall m \right)$$

Weiterhin ist  $\bigcup_{j \geq 0} (\Omega \setminus G_{n,j}) \leq$

$$\subseteq \left\{ \sum_{j=1}^{K(1)} \left( \left\| Y_{n,j-1} \right\|_1 + \left\| Y_{n,j-1} \right\|_1 \right) > Z(1) + Y(1) + 1 \right\}$$

$$\{ \sum_{j \geq 0} L'' ( \| \tilde{X}'_{n,j-1} \|_1 + \| \tilde{Y}'_{n,j-1} \|_1 ) \leq \{ k_n(t) \geq j \}$$

$$\sum_{i=1}^{q_m} \frac{1}{2} (k_n(t_{m,i-1}) < j \leq k_n(t_{m,i})) (\delta_m^2 + \| X'_n(T_{n,j-1}) - X'_n(t_{m,i-1}) \|^2 \\ (1 + \| X'_n(t_{m,i-1}) \|^2 + \| Y'_{n,m}(t_{m,i-1}) \|^2) ) > \delta \}$$

(daß in der zweiten Menge die gestrichenen Größen stehen, liegt daran,

daß, falls  $\omega \notin \bigcup_{j \geq 0} G'_{n,j}$  ist,  $X_{n,j}(\omega) = X'_{n,j}(\omega)$  ist  $\forall j$ )

1. Aus Voraussetzung 1 folgt, daß es ein  $n_1$  gibt mit

$$P \left( \sum_{j=1}^{k_n(1)} (\| \tilde{X}_{n,j-1} \|_1 + \| \tilde{Y}_{n,j-1} \|_1) > 1 + \tilde{X}(1) + \tilde{Y}(1) \right) < \eta \quad \forall n \geq n_1$$

$$2. \text{ aus } \overline{\lim}_n E \left( \max_{i=0}^{q_m} \| Y'_{n,m}(t_{m,i}) \|^2 \mid \mathcal{F}_0 \right) \leq \exp \{ 8 (L'+1) (\tilde{X}(1) + \tilde{Y}(1))^2 \}$$

ergibt sich wie bei  $\Delta_{n,m}(t)$

$$\overline{\lim}_n P \left( \max_{i=0}^{q_m} \| Y'_{n,m}(t_{m,i}) \|^2 > A_1 \right) \leq$$

$$\leq \eta + P \left( \exp \{ 8 (L' + 1) (\tilde{X}(1) + \tilde{Y}(1))^2 \} > \eta A_1 \right)$$

also gilt für ein hinreichend großes  $A_1$ :

$$\lim_n P \left( \max_{i=0}^{q_m} \| Y'_{n,m}(t_{m,i}) \|^2 > A_1 \right) \leq 2 \eta \quad \forall m$$

3.  $(P X_n^{-1})_n$  ist straff  $\Rightarrow$  die Verteilung von  $\sup \{ \| X'_n(t) \|^2 \mid t \leq 1 \}$

ist straff  $\Rightarrow$  es gibt ein  $A_2 \geq A_1$  mit  $P \left( \sup \{ \| X'_n(t) \|^2 \mid t \leq A_2 \} \leq \eta \right)$

$$\text{also } P \left( \max_{i=0}^{q_m} \| X'_n(t_{m,i}) \|^2 > A_2 \right) \leq \eta \quad \forall n, m$$

4. Falls  $\sup \{ \| X'_n(t) \|^2 \mid t \leq 1 \} \leq A_2$  ist, dann ist

$$\| X'_n(T_{n,j-1}) - X'_n(t_{m,i-1}) \|^2 \leq$$

$$\leq \bar{\delta} + 4 A_2 \frac{1}{2} \{ \max \{ \| X'_n(T_{n,j-1}) - X'_{n,j-1} - X'_n(t_{m,i-1}) \|^2 \mid$$

$$t_{m,i-1} < T_{n,j} \leq t_{m,i} \} > \bar{\delta} \} \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, q_m\}.$$

Damit wird dann auf dem Komplement der in 1., 2. und 3. abgeschätzten Mengen

$$\sum_{j \geq 1} L'' ( \| \mathcal{Z}'_{n,j-1} \|_1 + \| \mathcal{Y}'_{n,j-1} \|_1 ) \frac{1}{\mathbb{1}_{\{K_n(t) \geq j\}}}$$

$$\sum_{i=0}^{q_m} \frac{1}{\mathbb{1}_{\{K_n(t_{m,i-1}) < j \leq K_n(t_{m,i})\}}} (\delta_m^2 + \| X'_n(T_{n,j-1}) - X'_n(t_{m,i-1}) \|^2$$

$$(1 + \| X'_n(t_{m,i-1}) \|^2 + \| \mathcal{Y}'_{n,m}(t_{m,i-1}) \|^2) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{K_n(t)} L'' ( \| \mathcal{Z}'_{n,j-1} \|_1 + \| \mathcal{Y}'_{n,j-1} \|_1 ) (\delta_m^2 + \bar{\delta} (1 + A_1 + A_2)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q_m} L'' (\delta_m^2 + 4 A_2 (1 + A_1 + A_2)) \frac{1}{\mathbb{1}_{\{\max \{ \| X'_n(T_{n,j-1}) - X'_n(t_{m,i-1}) \|^2 \mid$$

$$\mid t_{m,i-1} < T_{n,j} \leq t_{m,i} \} > \bar{\delta} \} )$$

$$\cdot \frac{K_n(t_{m,i})}{j=K_n(t_{m,i-1})+1} ( \| \mathcal{Z}'_{n,j-1} \|_1 + \| \mathcal{Y}'_{n,j-1} \|_1 ) \frac{1}{\mathbb{1}_{\{K_n(t) \geq j\}}} \leq$$

$$\leq L'' (\delta_m^2 + \bar{\delta} (1 + A_1 + A_2)) (1 + \mathcal{Z}(1) + \mathcal{Y}(1)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q_m} L'' (\delta_m^2 + 4 A_2 (1 + A_1 + A_2)) \frac{1}{\mathbb{1}_{\{y_{n,i} > \delta\}}} )$$

$$\cdot \frac{K_n(t_{m,i})}{j=K_n(t_{m,i-1})+1} ( \| \mathcal{Z}'_{n,j-1} \|_1 + \| \mathcal{Y}'_{n,j-1} \|_1 )$$

wo man zur Vereinfachung

$$y_{n,i} := \max \{ \| X'_n(T_{n,j-1}) - X'_n(t_{m,i-1}) \|^2 \mid t_{m,i-1} < T_{n,j} \leq t_{m,i} \}$$

definiert.

Setzt man nun 1. - 4. ein, so ergibt sich

$$\overline{\lim}_n P ( \| Y_n(t) - Y_{n,m}(t) \| > \varepsilon ) \leq$$

$$\leq 6 \eta + P ( L'' (\delta_m^2 + \bar{\delta} (1 + A_1 + A_2)) (1 + \mathcal{Z}(1) + \mathcal{Y}(1)) > \frac{\delta}{2} ) +$$

$$+ \overline{\lim}_n P \left( \sum_{i=1}^{q_m} L'' (\delta_m^2 + 4 A_2 + (1 + A_1 + A_2) \frac{1}{n} \{ y_{n,i} > \bar{\delta} \}) \right)$$

$$\frac{\sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} (|x'_{n,j-1}|_1 + |y'_{n,j-1}|_1) > \frac{\delta}{2} )$$

5. Man wählt nun  $m_1$  so groß und  $\delta_0$  so klein, daß für  $m \geq m_1$  und

$$\bar{\delta} \leq \delta_0 \text{ gilt:}$$

$$P (L'' (\delta_m^2 + \bar{\delta} (1 + A_1 + A_2)) (1 + x(1) + y(1) > \frac{\delta}{2}) \leq \eta$$

$$6. \quad \overline{\lim}_n E \left( \sum_{i=1}^{q_m} L'' (\delta_m^2 + 4 A_2 (1 + A_1 + A_2) \frac{1}{n} \{ y_{n,i} > \bar{\delta} \}) \right)$$

$$\frac{\sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} (|x'_{n,j-1}|_1 + |y'_{n,j-1}|_1) |f_0| \leq$$

$$\leq L'' \delta_m^2 (1 + x(1) + y(1)) +$$

$$+ \overline{\lim}_n \sum_{i=1}^{q_m} L'' 4 A_2 (1 + A_1 + A_2) E \left( \frac{1}{n} \{ y_{n,i} > \bar{\delta} \} |f_0 \right)$$

$$E \left( \left( \frac{\sum_{j=k_n(t_{m,i-1})+1}^{k_n(t_{m,i})} (|x'_{n,j-1}|_1 + |y'_{n,j-1}|_1)^2 \right) |f_0 \right) \leq$$

$$\leq L'' \delta_m^2 (1 + x(1) + y(1)) + \sum_{i=1}^{q_m} L'' 4 A_2 (1 + A_1 + A_2) \bar{\delta}^{-1}$$

$$(8 + 2M^2) ( (x(t_{m,i}) - x(t_{m,i-1}))^2 + y(t_{m,i}) - y(t_{m,i-1}) )$$

$$(x(t_{m,i}) - x(t_{m,i-1})) + y(t_{m,i}) - y(t_{m,i-1}) )$$

wobei man die erste Wurzel durch die Chebychev-Ungleichung und (\*\*)

abschätzt, die zweite Wurzel mit Voraussetzung 1,

$$|x'_{n,j-1}|_1 \leq |x_{n,j-1}|_1 \text{ bzw. } |y'_{n,j-1}|_1 \leq |y_{n,j-1}|_1 \text{ und}$$

$$\lim_n E (Z_n^2 | f_0) \leq E ( (\overline{\lim}_n Z_n)^2 | f_0) \text{ falls (wie hier}$$

$$Z_n \leq 1 + x(1) + y(1) .$$

Wie für  $\Delta_{n,m}(t)$  oder in 2. ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_n P \left( \sum_{i=1}^q L^m (\delta_m^2 + 4 A_2 (1 + A_1 + A_2) + \frac{1}{\{Y_{n,i} > \delta\}} \right) \\ & \quad k_{n(m,i)}^{(m,i)} \left( \left| \mathbb{E}'_{n,j-1} + \frac{1}{2} + \left| Y'_{n,j-1} + \frac{1}{2} \right| \right) > \frac{\delta}{2} \right) \leq \\ & \leq \eta + P \left( L^m \delta_m^2 (1 + \mathbb{E}(1) + \mathbb{Y}(1)) + \sum_{i=1}^q L^m 4 A_2 (1 + A_1 + A_2) \delta^{-1} \right. \\ & \quad (8 + 2M^2) \left( \left| \mathbb{E}(t_{m,i}) - \mathbb{E}(t_{m,i-1}) \right|^2 + \mathbb{Y}(t_{m,i}) - \mathbb{Y}(t_{m,i-1}) \right) \\ & \quad \left. \left( \left| \mathbb{E}(t_{m,i}) - \mathbb{E}(t_{m,i-1}) \right| + \mathbb{Y}(t_{m,i}) - \mathbb{Y}(t_{m,i-1}) \right) > \frac{\eta \cdot \delta}{2} \right) \\ & \leq \eta + P \left( (1 + \mathbb{E}(1) + \mathbb{Y}(1)) L^m \delta_m^2 + \right. \\ & \quad \left. + L^m 4 A_2 (1 + A_2 + A_1) \delta^{-1} (\mathbb{E}(1) + \mathbb{Y}(1)) \right. \\ & \quad \left. (8 + M^2) \sup \{ \left| \mathbb{E}(t) - \mathbb{E}(s) \right| + \left| \mathbb{Y}(t) - \mathbb{Y}(s) \right| \mid |t - s| \leq \delta_m \} > \frac{\eta \cdot \delta}{2} \right) \end{aligned}$$

Da  $\mathbb{E}(\cdot)$  und  $\mathbb{Y}(\cdot)$  f.s. stetig sind, konvergiert der Radikand f.s. gegen 0 für  $m \rightarrow \infty$  (da  $\delta_m \rightarrow 0$ ), also gibt es ein  $m_2 \geq m_1$ , so daß die betrachtete Wahrscheinlichkeit kleiner  $\eta$  ist für alle  $m \geq m_2$ , damit ergibt sich aber insgesamt :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| Y_n(t) - Y_{n,m}(t) \right| > \varepsilon \right) \leq 9\eta \quad \forall m \geq m_2$$

Als nächstes sucht man Bedingungen zu finden, unter denen die endlich-dimensionalen Verteilungen von  $X_n$  und  $Y_{n,m}$  konvergieren.

Es zeigt sich, daß man  $Y_{n,m} = (H_n(Y_{n,0}, X_n))$  mit

$$H_n : \mathbb{M}^M \times D_{\mathbb{M}^M}([0,1]) \rightarrow D_{\mathbb{M}^M}([0,1]) \text{ schreiben kann.}$$

Sei nämlich  $0 = t_{m,0} < \dots < t_{m,q_m} = 1$  eine Zerlegung von  $[0,1]$  und

$$(X_{n,0})_n \subseteq \mathbb{M}^M, \text{ dann definiert man für } z \in D_{\mathbb{M}^M}([0,1]), \bar{X} \in \mathbb{M}^M :$$

$$\begin{aligned}
 H_{n,m}(\hat{X}, Z)(0) &:= X_{n,0}; \text{ für } i = 1, \dots, q_m \text{ ist } H_{n,m}(\hat{X}, Z)(t_{m,i}) := \\
 &= H_{n,m}(\hat{X}, Z)(t_{m,i}) + h_n(t_{m,i-1}, Z(t_{m,i-1}), \\
 &\quad H_{n,m}(\hat{X}, Z)(t_{m,i-1}))(Z(t_{m,i}) - Z(t_{m,i-1})) \\
 &\text{und für } t \in ]t_{m,i-1}, t_{m,i} \text{ ist } H_{n,m}(\hat{X}, Z)(t) := \\
 &= H_{n,m}(\hat{X}, Z)(t_{m,i-1}) + h_n(t_{m,i-1}, Z(t_{m,i-1}), \\
 &\quad H_{n,m}(\hat{X}, Z)(t_{m,i-1}))(Z(t) - Z(t_{m,i-1}))
 \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß  $Y_{n,m} = H_{n,m}(Y_{n,0}, X_n)$  ist für alle  $m$ .

Falls die Funktionen  $(H_{n,m})_n$  "folgenstetig" sind, kann man aus

$$(Y_{n,0}, X_n) \xrightarrow{D} (Y_0, X) \text{ sofort } Y_{n,m} \xrightarrow{D} H_0(Y_0, X) \text{ folgern.}$$

Dazu muß man an die  $h_n$  eine zusätzliche Bedingung stellen:

### Voraussetzung 3

Die Funktionen  $h_n: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{M}^M \times \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  erfüllen die Lipschitz-Bedingung: es gibt ein  $L > 0$ , so daß

$$\|h_n(t, x, y) - h_n(t', x', y')\| \leq L (\|t - t'\| + \|x - x'\| + \|y - y'\|)$$

∀  $(t, x, y), (t', x', y'), n \geq 1$ , es gibt ein meßbares

$$h_0: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{M}^M \times \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M, \text{ so daß:}$$

$$(t_n, X_n, Y_n) \rightarrow (t_0, X_0, Y_0) \Rightarrow h_n(t_n, X_n, Y_n) \rightarrow h_0(t_0, X_0, Y_0)$$

### 6. Lemma

Sei  $D_{H_{0,m}} := \{(\hat{X}, Z) \mid (\hat{X}_n, Z_n)_n \text{ mit } (\hat{X}_n, Z_n) \rightarrow (\hat{X}, Z) \text{ und } H_{0,m}(\hat{X}_n, Z_n) \rightarrow$

$H_{0,m}(\hat{X}, Z)\}$ , dann liegt  $\mathbb{M}^M \times \{Z \mid Z \text{ stetig in allen } t_{m,i}, i =$

$= 1, \dots, q_m\}$  im Komplement von  $D_{H_{0,m}}$  für jedes feste  $m$ .

### Beweis

$\hat{X}_n \rightarrow \hat{X}_0$ ; es gibt stetige, streng monotone  $\lambda_n: [0,1] \rightarrow [0,1]$

mit  $\lambda_n(0) = 0, \lambda_n(1) = 1, \sup_t \|\lambda_n(t) - t\| \rightarrow 0$

und  $\sup_t \|Z_n(t) - Z_0(\lambda_n(t))\| \rightarrow 0$ .



$$1) \quad \hat{X}_n + \hat{X}_0 \Rightarrow H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(0) = \hat{X}_n + \hat{X}_0 = H_{n,m}(\hat{X}_0, Z_0)(0);$$

$$2) \quad H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i}) + H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(t_{m,i}) \quad \forall i$$

Dies folgt sofort durch Induktion nach  $m$  aus 1), wenn man zeigt:

$$Z_n(t_{m,i}) \rightarrow Z_0(t_{m,i}) \quad \forall i; \text{ für } i = 0: \text{ ist das klar,}$$

$$i > 0: \| Z_n(t_{m,i}) - Z_0(t_{m,i}) \| \leq$$

$$\leq \| Z_n(t_{m,i}) - Z_0(\lambda_n(t_{m,i})) \| + \| Z_0(\lambda_n(t_{m,i})) - Z_0(t_{m,i}) \| + 0,$$

der erste Summand nach Voraussetzung, der zweite Summand, da  $Z_0$

stetig ist in  $t_{m,i}$

$$\begin{aligned} 3) \quad & H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(\lambda_n(t)) - H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t) = H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(t_{m,i}) - \\ & - H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i}) + \\ & (h_{0,m}(t_{m,i}, Z_0(t_{m,i})), H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(t_{m,i})) (Z_0(\lambda_n(t)) - Z_0(t_{m,i})) - \\ & - h_{n,m}(t_{m,i}, Z_n(t_{m,i})), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) (Z_n(t) - Z_n(t_{m,i})), t_{m,i} \leq \\ & t_{m,i} \leq t, \lambda_n(t) < t_{m,i+1} \\ & (h_{0,m}(t_{m,i}, Z_0(t_{m,i})), H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(t_{m,i})) (Z_0(t_{m,i+1}) - Z_0(t_{m,i})) + \\ & + h_{0,m}(t_{m,i+1}, Z_0(t_{m,i+1})), H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(t_{m,i+1})) (Z_0(\lambda_n(t)) - \\ & - Z_0(t_{m,i+1})) - h_{n,m}(t_{m,i}, Z_n(t_{m,i})), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) (Z_n(t) - \\ & - Z_n(t_{m,i})), t_{m,i} \leq t < t_{m,i+1} \leq \lambda_n(t) \\ & h_{0,m}(t_{m,i-1}, Z_0(t_{m,i-1})), H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(t_{m,i-1})) (Z_0(\lambda_n(t)) - \\ & - Z_0(t_{m,i})) - h_{n,m}(t_{m,i}, Z_n(t_{m,i})), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) (Z_n(t) - \\ & - Z_n(t_{m,i})), \lambda_n(t) < t_{m,i} \leq t < t_{m,i+1} \end{aligned}$$

Da  $\sup_t \| \lambda_n(t) - t \| + 0$ , liegt ab einem  $n_1$  immer einer der obigen

Fälle vor. Damit ergibt sich aber die folgende Abschätzung (an mancher Stelle muß man noch einen Summanden durch Addition und gleichzeitige Subtraktion einfügen, z.B. bei der ersten ( ) den Summanden

$$h_{0,m}(t_{m,i}, Z_0(t_{m,i})), H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(t_{m,i})) (Z_n(t) - Z_n(t_{m,i}))), \text{ also:}$$

$$\begin{aligned} & \| H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(\lambda_n(t)) - H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t) \| \leq \\ & \leq \| H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(t_{m,i}) - H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i}) \| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ( \| h_o(t_{m,i}, z_o(t_{m,i}), H_{o,m}(\hat{X}_o, Z_o)(t_{m,i})) \| \cdot ( \| z_o(\lambda_n(t)) - z_n(t) \| + \\
 & + \| z_o(t_{m,i}) - z_n(t_{m,i}) \| ) + \| h_o(t_{m,i}, z_o(t_{m,i}), H_{o,m}(\hat{X}_o, Z_o)(t_{m,i})) - \\
 & - h_n(t_{m,i}, z_n(t_{m,i}), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) \| \cdot \| z_n(t) - z_n(t_{m,i}) \| ), \\
 & t_{m,i} \leq t, \lambda_n(t) < t_{m,i+1} \\
 & ( \| h_o(t_{m,i+1}, z_o(t_{m,i+1}), H_{o,m}(\hat{X}_o, Z_o)(t_{m,i+1})) \| \cdot \| z_o(\lambda_n(t)) - \\
 & - z_o(t_{m,i+1}) \| + \| h_o(t_{m,i}, z_o(t_{m,i}), H_{o,m}(\hat{X}_o, Z_o)(t_{m,i})) - \\
 & - h_n(t_{m,i}, z_n(t_{m,i}), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) \| \cdot \| z_o(t_{m,i+1}) - z_o(t_{m,i}) \| + \\
 & + h_n(t_{m,i}, z_n(t_{m,i}), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) \| \cdot \| z_o(\lambda_n(t)) - \\
 & - z_o(t_{m,i+1}) \| + \| h_n(t_{m,i}, z_n(t_{m,i}), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) \| \cdot \\
 & ( \| z_o(\lambda_n(t)) - z_n(t) \| + \| z_o(t_{m,i}) - z_n(t_{m,i}) \| ) ), \\
 & t_{m,i} \leq t < t_{m,i+1} \leq \lambda_n(t) \\
 & ( ( \| h_o(t_{m,i-1}, z_o(t_{m,i-1}), H_{o,m}(\hat{X}_o, Z_o)(t_{m,i-1})) \| + \| h_n(t_{m,i}, z_n(t_{m,i}), \\
 & H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) \| ) \cdot \| z_o(\lambda_n(t)) - z_o(t_{m,i}) \| + \\
 & + \| h_n(t_{m,i}, z_n(t_{m,i}), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) \| \cdot ( \| z_o(\lambda_n(t)) - \\
 & - z_n(t) \| + \| z_o(t_{m,i}) - z_n(t_{m,i}) \| ) ), \lambda_n(t) < t_{m,i} \leq t < t_{m,i+1}
 \end{aligned}$$

Man macht folgende Definitionen:

$$C_1 := \sup_{n \geq 0} \max_{i=0}^{q_m} \| h_n(t_{m,i}, z_n(t_{m,i}), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) \|$$

$$C_2 := \sup_{n \geq 0} \sup_t \| z_n(t) \|$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{n,1} &:= \max_{i=0}^{q_m} \| h_n(t_{m,i}, z_n(t_{m,i}), H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i})) - \\
 &- h_o(t_{m,i}, z_o(t_{m,i}), H_{o,m}(\hat{X}_o, Z_o)(t_{m,i})) \|
 \end{aligned}$$

$$\delta_{n,2} := \max_{i=0}^{q_m} \sup \{ \| z_o(s) - z_o(t_{m,i}) \| \mid |s - t_{m,i}| \leq \sup_t \| \lambda_n(t) - t \| \}$$

$$\delta_{n,3} := \max_{i=0}^{q_m} \| z_n(t_{m,i}) - z_o(t_{m,i}) \|^2$$

$$\delta_{n,4} := \sup_t \| Z_0(\lambda(t)) - Z_n(t) \|$$

$$\delta_{n,1} := \max_{i=0}^{q_n} \| H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t_{m,i}) - H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(t_{m,i}) \|$$

a)  $Z_0$  ist stetig in  $t_{m,i}$   $\forall i$  und  $\sup |\lambda(t) - t| \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_{n,2} \rightarrow 0$

b) nach Voraussetzung:  $\delta_{n,4} \rightarrow 0$

c) nach 2) gilt:  $\delta_{n,3} \rightarrow 0$

d) nach 2) gilt:  $\delta_{n,5} \rightarrow 0$

e) aus c), d) und Voraussetzung 3 folgt:  $\delta_{n,1} \rightarrow 0$

f)  $Z_n \rightarrow Z_0$  (in  $D_M((0,1)) \Rightarrow C_2 < \infty$

g) C)  $\Rightarrow C_1 < \infty$

Setzt man in obige Abschätzung ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \sup \| H_{0,m}(\hat{X}_0, Z_0)(\lambda_n(t)) - H_{n,m}(\hat{X}_n, Z_n)(t) \| \leq \\ & \leq \delta_{n,5} + C_1 (\delta_{n,4} + \delta_{n,3}) + \delta_{n,1}^2 C_2 + C_1 \delta_{n,2} + \delta_{n,1}^2 C_2 + \\ & + C_1 \delta_{n,2} + C_1 (\delta_{n,4} + \delta_{n,3}) + 2 C_1 \delta_{n,2} + C_1 (\delta_{n,4} + \delta_{n,3}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 7. Folgerung

Falls  $(Y_{n,0}, X_n) \rightarrow (Y_0, X)$ , wobei  $X$ , stochastisch stetig ist, dann gilt:

$$Y_{n,m} = H_{n,m}(Y_{n,0}, X_n) \xrightarrow{D} H_{0,m}(Y_0, X) \text{ für jedes } m.$$

## Beweis

$X$  stochastisch stetig  $\Rightarrow$

$$P(Y_0, X)^{-1}(D_{H_{0,m}}) \leq P X^{-1}(Z \mid Z \text{ unstetig in einem } T_{m,i}) = 0$$

mit [2], Theorem 5.5 folgt die Behauptung.

## 8. Bemerkung

Angenommen, Voraussetzung 1 und 3 wären erfüllt und  $(Y_{n,0}, X_n(t_1), \dots, X_n(t_r))$

$\rightarrow \mu_{t_1, \dots, t_r}$  für  $t_1, \dots, t_r \in D_1$ , wobei  $D_1$  dicht in  $[0,1]$  mit  $1 \in D_1$ , dann

hätte man die Verteilungskonvergenz von  $(Y_{n,0}, X_n, Y_n)_n$  gezeigt, denn

$(P(Y_{n,o}, X_n)^{-1})_n$  ist relativ kompakt, sei  $(X_o, X)$  ein Häufungspunkt, dann ist  $X$  stochastisch stetig, also  $\{t \in [0,1] \mid P(X(t-) = X(t)) = 1\} = (0,1)$ , daraus folgt für die Teilfolge  $(Y_{n,o}, X_n)_n$ , die gegen  $(Y_o, X)$  konvergiert:

$$(Y_{n,o}, X_n(t_1), \dots, X_n(t_r)) \xrightarrow{D} (Y_o, X(t_1), \dots, X(t_r)) \quad \forall t_1, \dots, t_r \in (0,1);$$

$$(Y_{n,o}, X_n(t_1), \dots, X_n(t_r)) \xrightarrow{D} \mu_{t_1, \dots, t_r} \quad \forall t_1, \dots, t_r \in D_1 \text{ nach Voraussetzung, also:}$$

$$\mu_{t_1, \dots, t_r} = P(Y_o, X(t_1), \dots, X(t_r))^{-1} \quad \forall t_1, \dots, t_r \in D_1$$

aber die Verteilung von  $(Y_o, X)$  ist eindeutig durch die  $\mu_{t_1, \dots, t_k}$  bestimmt,

also hat jeder Häufungspunkt die gleiche Verteilung, also konvergiert

$$(P(Y_{n,o}, X_n)^{-1})_n.$$

Nun ist  $Y_{n,m} = H_{n,m}(X_n)$ . Wähle  $t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_r \in (0,1)$ , dann gilt (da  $X$  stochastisch stetig) für jedes  $m$  nach Folgerung 7:

$$(Y_{n,o}, X_n(t_1), \dots, X_n(t_k), Y_{n,m}(s_1), \dots, Y_{n,m}(s_r)) \xrightarrow{D} (Y_o, X(t_1), \dots, X(t_k), H_{o,m}(X)(s_1), \dots, H_{o,m}(X)(s_r)).$$

Nach Lemma 5 gilt für alle  $\epsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(\| (Y_{n,o}, X_n(t_1), \dots, X_n(t_k), Y_{n,m}(s_1), \dots, Y_{n,m}(s_r)) -$$

$$- (Y_{n,o}, X_n(t_1), \dots, X_n(t_k), Y_n(s_1), \dots, Y_n(s_r)) \| > \epsilon) = 0$$

Nach Satz A. 1 gibt es dann eine Verteilung  $\mu_{t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_r}$  mit

$$(Y_{n,o}, X_n(t_1), \dots, X_n(t_k), Y_n(s_1), \dots, Y_n(s_r)) \xrightarrow{D} \mu_{t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_r}.$$

Da nach Lemma 4  $(P(Y_{n,o}, X_n, Y_n)^{-1})_n$  relativ kompakt ist mit stochastisch stetigen Häufungspunkten, liefert die gleiche Argumentation wie für

$$(P(Y_{n,o}, X_n)^{-1})_n \text{ die Konvergenz von } (P(Y_{n,o}, X_n, Y_n)^{-1})_n.$$

Man muß also Voraussetzungen finden, unter denen die endlichdimensionalen Verteilungen der  $X_n$  konvergieren.

#### Voraussetzung 4

$D_1$  sei abzählbar und dicht in  $(0,1)$ ,  $1 \in D_1$ ,

i)  $\max \{ P(\|X_{nj}\| > \epsilon \mid f_{n,j-1}) \mid j = 1, \dots, k_n(1) \} \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall \epsilon > 0$

ii)  $\nu$  ist ein  $f_0$ -meßbares, zufälliges Maß auf  $B_{\mathbb{M}^M} \times B[0,1]$  mit :

$$\nu(\{0\} \times [0,1]) = 0 \text{ f.s.}, \nu((\mathbb{M}^M \setminus \{\|X\| < \eta\}) \times [0,1]) < \infty \text{ f.s. } \forall \eta > 0,$$

$$\int_{\mathbb{M}^M} \min \{ 1, \|X\|^2 \} \nu(dX \times (0,1)) < \infty \text{ f.s.};$$

Ist  $A \in \mathbb{M}^M \setminus \{\|X\| \leq \delta\}$  für ein  $\delta > 0$ , so sei  $\nu(A \times [0, \cdot])$  f.s.

stetig auf  $(0,1)$ ; für alle  $t \in D_1$  und  $\delta > 0$  mit  $\nu(\partial(\|X\| \leq \delta)$

$\times [0,1]) = 0$  f.s. gelte

$$P_n(\cdot \times [0,t]) \Big|_{\{\|X\| > \delta\}} := \sum_{j=1}^{k_n(t)} P(X_{n,j} \in \cdot \mid f_{n,j-1}) \Big|_{\{\|X\| > \delta\}} \stackrel{*}{\rightarrow} \\ \nu(\cdot \times [0,t]) \Big|_{\{\|X\| > \delta\}} \text{ n.W.}$$

iii) Sei  $b_n(\delta, t) (i, l, p, q) :=$

$$\sum_{j=1}^{k_n(t)} (E_{n,j-1} X_{n,j}^{(i,l)} X_{n,j}^{(p,q)} - \|X_{n,j}\| \leq \delta -$$

$$- E_{n,j-1} X_{n,j}^{(i,l)} \|X_{n,j}\| \leq \delta - E_{n,j-1} X_{n,j}^{(p,q)} \|X_{n,j}\| \leq \delta)$$

für ein  $\eta > 0$  mit  $\nu(\partial(\|X\| \leq \eta) \times [0,1]) = 0$  f.s. gebe es

$f_0$ -meßbare, f.s. stetige Funktionen  $b(\eta, \cdot) (i, l, p, q) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

so daß für alle  $t \in D_1$  gilt:

$$b_n(\eta, t) (i, l, p, q) \rightarrow b(\eta, t) (i, l, p, q) \text{ n.W.}$$

- iv) Sei  $a_n(\delta, t) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} E_{n,j-1} X_{n,j} \frac{1}{\|X_{n,j}\|} \leq \delta$ , für ein  $\eta_1 > 0$   
 mit  $\nu(\{ \|X\| \leq \eta_1\} \times (0,1)) = 0$  f.s. gebe es eine  $f_0$ -meßbare,  
 f.s. stetige Funktion  $a(\eta_1, \cdot): [0,1] \rightarrow M^M$ , so daß für alle  
 $t \in D_1$  gilt:  $a_n(\eta_1, t) \rightarrow a(\eta_1, t)$  n.W.

#### Voraussetzung 5

Sei  $Z_n(\delta, t) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} \|E_{n,j-1} X_{n,j} \frac{1}{\|X_{n,j}\|}\| \leq \delta$ ; zu jeder  
 Teilfolge  $(n') \leq (n)$  gibt es eine Teilfolge  $(n'') \leq (n')$ ,  
 zu einem  $\eta > 0$  mit  $\nu(\{ \|X\| \leq \eta\} \times (0,1)) = 0$  f.s. eine  
 $f_0$ -meßbare, f.s. stetige Funktion  $Z(\eta, \cdot): [0,1] \rightarrow R_+$ , so daß  
 $\overline{\lim} (Z_{n''}(\eta, t) - Z_{n''}(\eta, s)) \leq Z(\eta, t) - Z(\eta, s)$  f.s.  $\forall s, t \in D_1, s < t$

Zunächst noch einige Bemerkungen zu den Voraussetzungen 4 und 5:

zu i): Diese Bedingung besagt, daß die  $X_{n,j}$  "infinitesimal" sind, was  
 sie überhaupt erst zu "Kandidaten" für den zentralen Grenzwertsatz  
 macht.

zu 4 i) und ii):

Ist 4 ii) erfüllt, dann folgt für jedes  $\varepsilon$  mit  $\nu(\{ \|X\| \leq \varepsilon\} \times [0,1]) = 0$   
 f.s. wegen der Stetigkeit von  $\nu(\{ \|X\| > \varepsilon\} \times [0, \cdot]) : \max_{j=1}^{k_n(1)} p_{n,j}(\|X\| > \varepsilon) \rightarrow$   
 $\rightarrow 0$  n.W. und damit 4 i). In Folgerung 11 wird eine teilweise Um-  
 kehrung des (nächsten) Satzes 9 bewiesen, und dort muß 4 i) voraus-  
 gesetzt werden, weshalb man es auch hier behält.

zu 4 ii):

Zwei Kriterien für die in ii) geforderte Konvergenz

1) für jede stetige, beschränkte Funktion  $g: \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{R}$

die auf einer Nullumgebung verschwindet, ist

$$\int g(X) p_n(dx \times [0, t]) \rightarrow \int g(X) v(dx \times [0, t]) \text{ n.W. } \forall t \in D_1$$

2)  $\omega \in D_2$  dicht in  $\mathbb{M}^M$ , für jedes Intervall  $I$  mit Endpunkten in  $D_2$  und  $d(I, 0) > 0$  gilt

$$p_n(I \times [0, t]) \rightarrow v(I \times [0, t]) \text{ n.W. } \forall t \in D_1$$

Zu ii) und iii): Seien die  $X_{n,j}$  unabhängig in jeder Zeile und, der Einfachheit halber,  $\mathbb{R}$ -wertig; sei  $t \in D_1$ ; es läßt sich zeigen, daß unter den Voraussetzungen i) und ii) die Bedingung iii) äquivalent ist zu:

es gilt ein stetiges  $b_0(\cdot)$ , so daß

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\overline{\lim}_n \sum_{j=1}^n k_{n,j}(t)}{\lim_n \sum_{j=1}^n (E X_{n,j}^2 \frac{1}{|X_{n,j}| \leq \delta} - E^2 X_{n,j} \frac{1}{|X_{n,j}| \leq \delta})} = b_0(t)$$

[3], 12. 2, Theorem 2 besagt dann:

Es gibt eine Folge  $(A_n)_n$  und eine unendlich teilbare Zufalls-

variable  $X$  mit  $\sum_{j=1}^n k_{n,j}(t) X_{n,j} - A_n \xrightarrow{D} X$  genau dann, wenn ii), iii)

erfüllt sind und  $A_n = a_n(t) + \text{Konstante} + o(n)$  ist.

Die charakteristische Funktion von  $X$  ist

$$\phi(u) = \exp \{ i u a + \int (e^{i u x} - 1 - i u x \frac{1}{|x| \leq \eta})$$

$$v(dx \times [0, t]) - \frac{u^2}{2} b_0(t) \}$$

$X$  ist also etwas wie die Faltung aus einer Konstanten  $a$ , einer

normalverteilten  $N(0, b_0(t))$  Zufallsvariablen und einer "verschobenen" Mischung von Poisson-Variablen, charakterisiert durch v. Dabei bestimmen ii), iii) und  $a_n(t)$  gerade die Parameter  $a$ ,  $v$ ,  $b_0$  der Verteilung von  $X$ .

zu iv): Diese Bedingung besagt, daß man nicht zentrieren muß, daß

$\sum_{j=1}^{k_n(t)} X_{n,j}$  nach Verteilung gegen eine unendlich teilbare Zufallsvariable konvergiert.

zu Voraussetzung 5: Diese Voraussetzung ist nicht nötig für die Verteilungskonvergenz von  $X_n$ , sondern für die von  $Y_n$ .

$$\begin{aligned} \text{Schreibt man z.B. } Y_n(t) &= Y_{n,0} + \int_0^t h(s-, X_n(s-), Y_n(s-)) dX_n(s) = \\ &= Y_{n,0} + \int_0^t h(s-, X_n(s-), Y_n(s-)) d(X_n - a_n)(s) + \int_0^t h(s-, X_n(s-), \\ &Y_n(s-)) da_n(s), \end{aligned}$$

so kann man aus ii) und iii) folgern, daß die "quadratische Variation" von  $X_n - a_n$  konvergiert. Voraussetzung 5 sagt nun, daß die Variation von  $a_n$  durch eine  $f_0$ -meßbare Funktion in der Grenze beschränkt ist.

Man kann zeigen, daß aus  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t \leq s+\delta} (Z_n(t) - Z_n(s)) = 0$  f.s. die

Existenz einer Funktion  $Z(s)$ , stetig und monoton wachsend, und einer Teilfolge  $(n') \subset (n)$  mit  $\sup_t |Z_{n'}(t) - Z(t)| \rightarrow 0$  f.s. folgt.

Allerdings muß  $Z$  nicht  $f_0$ -meßbar sein. Im Fall unabhängiger Zufallsvariablen ist dies aber keine Einschränkung. (Es wird noch gezeigt, daß aus Voraussetzungen 4 i) und 5 die Existenz einer Teilfolge

$(n'') \subset (n')$  folgt mit  $P(\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n'' \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t \leq s+\delta} (Z_{n''}(t) - Z_{n''}(s)) = 0) = 1)$



### 9. Satz

Sind die Voraussetzungen 3, 4 und 5 erfüllt, dann gibt es einen stochastisch stetigen Prozeß  $X$  mit  $X_n \xrightarrow{D} X$ . Gilt für  $(Y_{n,o})_n$  noch eine der folgenden Bedingungen:

- 1)  $Y_{n,o}$  und  $X_n$  sind unabhängig und es gibt ein  $Y_o$  mit  $Y_{n,o} \xrightarrow{D} Y_o$ .
- 2) Es gibt ein für  $f_o$ -meßbares  $Y_o$  mit  $Y_{n,o} \xrightarrow{D} Y_o$  n.W.
- 3) Es gibt ein von  $X$  unabhängiges  $Y_o$  mit  $Y_{n,o} \xrightarrow{D} Y_o$  n.W.,  
dann folgt: es gibt einen stochastisch stetigen Prozeß  
 $Y$  mit  $(Y_{n,o}, X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (Y_n, X, Y)$

### Beweis

Sei o. B. d. A.  $K_n(1) \leq A_n$  f.s.,  $(A_n)_n \stackrel{C}{\subset} R$ ; andernfalls wähle  $A_n$  mit  $P(K_n(1) > A_n) < 2^{-n}$ ,  $\bar{K}_n := \min \{k_n, A_n\}$ , nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt:  $K_n = \bar{K}_n \forall n \geq n_o(\omega)$ , also kann man bei Aussagen mit  $n \rightarrow \infty$   $k_n$  durch  $\bar{K}_n$  ersetzen und umgekehrt.

Wähle eine Folge  $(C_r)_r \stackrel{C}{\subset} R$  mit  $C_r \uparrow \infty$ , mit  $\nu(\{ \|X\| \leq C_r \} \times [0,1]) = 0$  f.s. und  $P(|Y_o| \leq C_r) = 0$ .

Für  $C \in R$  definiert  $Y_{n,o}^C := Y_{n,o} 1_{|Y_{n,o}| \leq C}$ ,  $X_{n,j}^C := X_{n,j} 1_{|X_{n,j}| \leq C}$ , mit diesen  $X_{n,o}^C$  und  $X_{n,j}^C$  an Stelle der  $Y_{n,o}$ ,  $X_{n,j}$  definiert man  $X_n^C(\cdot)$ ,  $Y_n^C(\cdot)$  und

$Y_{n,m}^C(\cdot)$  analog zu  $X_n(\cdot)$ ,  $Y_n(\cdot)$ ,  $Y_{n,m}(\cdot)$ .

- 1) Sei  $C \in (C_r)_r$  beliebig aber fest, man zeigt für die abgeschnittenen Variablen: jede Teilfolge  $(n_1)_n \stackrel{C}{\subset} (n)$  enthält eine Teilfolge  $(n_2)_n \stackrel{C}{\subset} (n_1)$ , so daß diese Voraussetzung 1 erfüllt. Da  $D_1$  abzählbar ist, findet man zunächst  $(n_2)_n \stackrel{C}{\subset} (n_1)$  mit

mit  $\overline{\lim}_{n_2} (\mathbb{E}_{n_2}(\eta, t) - \mathbb{E}_{n_2}(\eta, s)) \leq \mathbb{E}(\eta, t) - \mathbb{E}(\eta, s) \text{ f.s.}$

$\forall t, s \in D_{n,1} \quad s < t.$

$P\{\omega \mid \overline{\lim}_{n_2} (\mathbb{E}_{n_2}(\eta, t, \omega) - \mathbb{E}_{n_2}(\eta, s, \omega)) \leq \mathbb{E}(\eta, t, \omega) - \mathbb{E}(\eta, s, \omega)$

$\forall s, t, \in D_1 \quad s, < t \text{ und } \mathbb{E}(\eta, s, \omega) \text{ ist stetig in } t) = 1.$

Sei also  $\omega$  aus obiger Menge,  $s, t, \in ] 0, 1 [ \quad s < t;$

wähle  $s', t' \in D_1$  mit  $s' < s < t < t' \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n_2} (\mathbb{E}_{n_2}(\eta, t, \omega) - (\mathbb{E}_{n_2}(\eta, s, \omega))) \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{n_2} (\mathbb{E}_{n_2}(\eta, t', \omega) - (\mathbb{E}_{n_2}(\eta, s', \omega))) \leq \\ & \leq \mathbb{E}(\eta, t', \omega) - \mathbb{E}(\eta, s', \omega) \xrightarrow[t' \rightarrow t]{s' \rightarrow s} \mathbb{E}(\eta, t, \omega) - \mathbb{E}(\eta, s, \omega) \end{aligned}$$

$$P(\omega \mid \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n_2} \sup_{s \leq t \leq s+\delta} (\mathbb{E}_{n_2}(\eta, t, \omega) - (\mathbb{E}_{n_2}(\eta, s, \omega))) = 0) = 1$$

nach Satz A. 8 und wie gezeigt:

$$\begin{aligned} P\{\omega \mid \overline{\lim}_{n_2} (\mathbb{E}_{n_2}(\eta, t, \omega) - \mathbb{E}_{n_2}(\eta, s, \omega)) \leq \mathbb{E}(\eta, t, \omega) - \mathbb{E}(\eta, s, \omega) \\ \forall s, t) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \|\mathbb{E}_{n,j-1} X_{n,j}^C\|_1 = \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \|E(X_{n,j} \frac{1}{\|X_{n,j}\|} \mid \mathcal{C} \mid f_{n,j-1})\|_1 \leq \\ & \leq \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \|E(X_{n,j} \frac{1}{\|X_{n,j}\|} \mid \mathcal{C} \mid f_{n,j-1})\|_1 + \\ & + \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} E(\|X_{n,j}\|_1 \frac{1}{\|X_{n,j}\|} \mid \mathcal{C} \mid f_{n,j-1}) = \\ & = \mathbb{E}_n(\eta, t) - \mathbb{E}_n(\eta, s) + \int_{\|X\| \leq C} \|X\|_1 P_n(dX \mid s, t) \end{aligned}$$

Analog zu dem Fall von  $\mathbb{E}_n(\eta, t)$  und  $\mathbb{E}(\eta, t)$  zeigt man mit Voraussetzung 4 ii): es gibt eine Teilfolge  $(n_3) \subset (n_2)$  mit

$$P(\omega) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\|x\| \leq C} \|x\|_1 P_n(dx) s, t, \omega \leq \int_{\|x\| \leq C} \|x\|_1 v(dx) s, t, \omega \quad \forall s, t = 1$$

Da  $v(A \times [0, \cdot])$  f.s. stetig ist und  $f_0$  meßbar, ist mit  $Z(t) :=$   
 $:= Z(\eta, t) + \int_{\|x\| \leq C} \|x\|_1 v(dx) x [0, t]$  die eine Hälfte von Voraus-

setzung 1 für eine Teilfolge  $(n_j)$  erfüllt.

Zeige (1.1)

$$k_{n_j}^{(1)} E_{n_j, j-1}^2 X_{n_j, j}^{(i, 1)} 1_{\|X_{n_j, j}\| \leq \delta} \rightarrow 0 \text{ n.w. } \forall \delta > 0;$$

$$\text{Sei } \delta < \eta : k_{n_j}^{(1)} E_{n_j, j-1}^2 X_{n_j, j}^{(i, 1)} 1_{\|X_{n_j, j}\| \leq \delta} \leq$$

$$\leq 2 k_{n_j}^{(1)} E_{n_j, j-1}^2 X_{n_j, j}^{(i, 1)} 1_{\|X_{n_j, j}\| \leq \eta} + 2 k_{n_j}^{(1)} E_{n_j, j-1}^2 X_{n_j, j}^{(i, 1)}$$

$$1_{\delta < \|X_{n_j, j}\| \leq \eta} ; k_{n_j}^{(1)} E_{n_j, j-1}^2 X_{n_j, j}^{(i, 1)} 1_{\|X_{n_j, j}\| \leq \eta} \leq$$

$$\leq 2 \max_{j=1}^{k_{n_j}^{(1)}} |E_{n_j, j-1} X_{n_j, j}^{(i, 1)}| 1_{\|X_{n_j, j}\| \leq \eta} + k_{n_j}^{(1)} |E_{n_j, j-1} X_{n_j, j}^{(i, 1)}|$$

$$1_{\delta < \|X_{n_j, j}\| \leq \eta} \leq (\delta' + \eta \max_{j=1}^{k_{n_j}^{(1)}} (P(\|X_{n_j, j}\| > \delta') | f_{n_j, j-1}) Z_n(\eta, 1) \Rightarrow$$

$$\lim_n k_{n_j}^{(1)} E_{n_j, j-1}^2 X_{n_j, j}^{(i, 1)} 1_{\|X_{n_j, j}\| \leq \eta} \leq \delta' Z(\eta, 1)$$

$$\text{Da } \delta' < \eta \text{ beliebig ist, folgt: } k_{n_j}^{(1)} E_{n_j, j-1}^2 X_{n_j, j}^{(i, 1)} 1_{\|X_{n_j, j}\| \leq \eta} \rightarrow 0 \text{ n.w.}$$

$$k_{n_j}^{(1)} E_{n_j, j-1}^2 X_{n_j, j}^{(i, 1)} 1_{\delta < \|X_{n_j, j}\| \leq \eta} \leq \eta \max_{j=1}^{k_{n_j}^{(1)}} P(\|X_{n_j, j}\| > \delta)$$

$$\int \|x\| 1_{\delta < \|y\| \leq \eta} P_n(dx) x [0, 1] \rightarrow 0 \text{ n.w. } \forall \delta > 0$$

Damit ist die obige Behauptung gezeigt und es gilt also

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad & k_n(t) = \sum_{j=1}^n E_{n,j-1} X_{n,j}(i,1) X_{n,j}(p,q) 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} + \\
 & + b(\eta, t)(i,1,p,1) \text{ n.w. } \forall t \in D_1, i,1,p,q \in \{1, \dots, M\} \\
 & k_n(t) = \sum_{j=1}^n E_{n,j-1} (X_{n,j}^C(i,1))^2 = \sum_{j=1}^n E_{n,j-1} (X_{n,j}^2(i,1) 1_{\|X_{n,j}\| \leq C} = \\
 & = \sum_{j=1}^n E_{n,j-1} X_{n,j}^2(i,1) 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} + \sum_{j=1}^n E_{n,j-1} X_{n,j}^2(i,1) 1_{\eta < \|X_{n,j}\| \leq C} \\
 & \Rightarrow y_n(t) = \sum_{j=1}^n E_{n,j-1} (X_{n,j}^C(i,1))^2 1_1 = \\
 & = \sum_{i,1=1}^M \sum_{j=1}^n E_{n,j-1} X_{n,j}^2(i,1) 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} + \\
 & + \sum_{j=1}^n E_{n,j-1} \left( \sum_{i,1=1}^M X_{n,j}^2(i,1) \right) 1_{\eta < \|X_{n,j}\| \leq C} 1_{f_{n,j-1}} \\
 & = \sum_{i,1=1}^M \left( \sum_{j=1}^n E_{n,j-1} X_{n,j}^2(i,1) 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \right) + \int |x|^2 1_{\eta < |x| \leq C} p_n(dx \times [0,t]) \\
 & + \sum_{i,1=1}^M b(\eta, t)(i,1) + \int |x|^2 1_{\eta < |x| \leq C} v(dx \times [0,t]) \text{ n.w. } \forall t \in D_1
 \end{aligned}$$

Wie bei  $\bar{y}_n$  und  $\bar{z}$  zeigt man nun mit

$$y(t) := \sum_{i,1=1}^M b(\eta, t)(i,1) + \int |x|^2 1_{\eta < |x| \leq C} v(dx \times (0,t)) :$$

es gibt eine Teilfolge  $(n_4) \subset (n_3)$ , so daß

$$\lim_{n_4} (y_n(t) - y_n(s)) \leq y(t) - y(s) \text{ f.s. } \forall s, t$$

Damit ist gezeigt:

(1.3) Für festes  $C_T$  gilt: jede Teilfolge  $(n_1) \subset (n)$  enthält eine Teilfolge  $(n_2) \subset (n_1)$ , so daß Voraussetzung 1 erfüllt ist, insbesondere ist

$$(p(Y_{n,o}^{C_T}, X_n^{C_T}, Y_n^{C_T})^{-1})_n \text{ relativ kompakt (nach Lemma 4).}$$

- 2) Man zeigt nun, daß  $(Y_{n,0}^C, X_n^C(t_1), \dots, X_n^C(t_k))_n$  in Verteilung konvergiert für  $t_1, \dots, t_k \in D_1$ ; sei  $t_0 := 0$ ;

Dazu muß man nachweisen, daß für  $u_0 \in \mathbb{R}, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^{M^2}$

$$\lim_n E \exp \{ i u_0 Y_{n,0}^C + i \sum_{j=1}^M u_j^T X_n^C(t_j) \} = \psi(u_0, u_1, \dots, u_k) \text{ ist}$$

und  $\psi$  stetig in 0.

$$\sum_{j=1}^k u_j^T X_n^C(t_j) = \sum_{j=1}^k u_j^T \sum_{l=1}^{k_n(t_j)} X_{n,j}^C = \sum_{p=1}^k \left( \sum_{j=p}^k u_j^T \right) \sum_{l=k_n(t_{p-1})}^{k_n(t_p)} X_{n,j}^C$$

Sei  $\mu_{n,j}(\cdot, \omega)$  eine reguläre Version von  $P(X_{n,j}^C \in \cdot \mid \mathcal{F}_{n,j-1})(\omega)$ .

$$\max_{j=1}^{k_n(1)} \mu_{n,j}(|X| > \frac{1}{m}) = \max_{j=1}^{k_n(1)} P(|X_{n,j}^C| > \frac{1}{m} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}) \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall m$$

Daher gibt es eine Teilfolge (Diagonalfolge), so daß

$$\max_{j=1}^{k_n(1)} \mu_{n',j}(|X| > \frac{1}{m}) \rightarrow 0 \text{ f.s. } \forall m. \text{ Da } \mu_{n,j}(\cdot, \omega) \text{ ein Maß ist (f.s.)}$$

$$\text{gilt dann: } P(\omega \mid \max_{j=1}^{k_n(1, \omega)} \mu_{n',j}(|X| > \epsilon, \omega) \rightarrow 0 \forall \epsilon) = 1$$

Die gleiche Methode wendet man bei ii) - iv) an und erhält eine Menge

$\Omega_0 = 1$  und eine Teilfolge  $(n_1)$ , so daß für  $\omega \in \Omega_0$  gilt:

$$i)' \max \{ \mu_{n_1,j}(|X| > \epsilon, \omega) \mid j=1, \dots, k_{n_1}(1, \omega) \} \rightarrow 0 \forall \epsilon > 0$$

$$ii)' p_{n_1}(x[0, t_1], \omega)_{\{|X| > \delta\}} + v(x[0, t_1], \omega)_{\{|X| > \delta\}} \\ \text{für } l=1, \dots, k; \delta \in \{ \delta' \mid v(\partial \{ |X| \leq \delta' \} \times [0, 1]) = 0 \text{ f.s.} \}$$

$$iii)' b_{n_1}(\eta, t_1, \omega)(p, q, p', q') \rightarrow b(\eta, t_1, \omega)(p, q, p', q')$$

für  $l=1, \dots, k; p, q, p', q' \in \{1, \dots, M\}$

$$\text{iv) } a_{n_1}(\eta, t_1, \omega) \rightarrow a(\eta, t_1, \omega) \quad \text{für } l=1, \dots, k$$

$$(1.4) \quad \lim_{n_1} \sum_{j=1}^{k_{n_1}(1, \omega)} \left( \int x(p, q) \cdot 1_{\|x\| \leq \eta} \mu_{n_1, j}(dx, \omega) \right)^2 = 0; \quad p, q = 1, \dots, M$$

(Dabei folgt (1.4) aus (1.1).)

Aus i) - (1.4) folgt nun für  $\omega \in \Omega_0$  (man schreibt der Einfachheit wegen  $n$  statt  $n_1$ ) :

$$\text{i)''} \quad \max \{ \mu_{n, j}(\|x\| > \epsilon, \omega) \mid j=1, \dots, k_n(1, \omega) \} \rightarrow 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\text{ii)''} \quad \sum_{j=k_n(\frac{n}{t_{e-1}}, \omega)+1}^{k_n(t_e, \omega)} \mu_{n, j}(\cdot, \omega) \Big|_{\{\|x\| > \delta\}} \cdot \int_{\mathbb{R}^M} v(\cdot, x) \cdot 1_{t_{e-1}, t_e}(\cdot, \omega) \Big|_{\{\|x\| > \delta\}} \\ \text{für } e=1, \dots, k; \quad \delta \in \{\delta' \mid \int v(\cdot, x) \cdot 1_{t_{e-1}, t_e}(\cdot, \omega) \Big|_{\{\|x\| \leq \delta'\}} dx = 0\}$$

$$\text{iv)''} \quad \sum_{j=k_n(\frac{n}{t_{e-1}}, \omega)+1}^{k_n(t_e, \omega)} \int x \cdot 1_{\|x\| \leq \eta} \mu_{n, j}(dx, \omega) \rightarrow a(\eta, t_e, \omega) - a(\eta, t_{e-1}, \omega); e=1, \dots, k$$

zu zeigen bleibt noch

$$\text{iii)''} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n} \sum_{j=k_n(t_{l-1}, \omega)+1}^{k_n(t_l, \omega)} \left( \int (u^T x)^2 \cdot 1_{\|x\| \leq \delta} \mu_{n, j}(dx, \omega) - \right. \\ \left. - \left( \int (u^T x) \cdot 1_{\|x\| \leq \delta} \mu_{n, j}(dx, \omega) \right)^2 \right) = \Phi(u, u; t_{l-1}, t_l, \omega)$$

für alle  $u \in \mathbb{R}^{M^2}$ ,  $l \in \{1, \dots, M\}$ , wo  $\Phi$  eine Kovarianzfunktion ist.

Beweis i)'' - iv)'':

Definiere nun:

$$(1.5) \quad b_0(t)(p, q, p', q') := b(\eta, t)(p, q, p', q') - \\ - \int x(p, q) \cdot x(p', q') \cdot 1_{\|x\| \leq \eta} v(dx \times (0, t)),$$

dann ist  $b_0$  eine  $\mathcal{F}_0$ -meßbare, f.s. stetige Funktion.

Man zeigt:

$$(1.6) \quad k_n(t_e, \omega) \sum_{j=1}^n \int X(p, q) 1_{|X| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) - \int X(p', q') 1_{|X| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) \rightarrow 0$$

wegen  $|\sum_j a_j b_j| \leq 2 \sum_j a_j^2 + 2 \sum_j b_j^2$  genügt es

$$k_n(t_e, \omega) \sum_{j=1}^n \left( \int X(p, q) 1_{|X_{n,j}| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) \right)^2 \rightarrow 0 \text{ zu zeigen.}$$

$$\begin{aligned} & \left( \int X(p, q) 1_{|X| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) \right)^2 = \\ & = \left( \int X(p, q) 1_{|X| \leq \eta} \mu_{n,j}(dX, \omega) - \int X(p, q) 1_{\delta < |X| \leq \eta} \mu_{n,j}(dX, \omega) \right)^2 \leq \\ & \leq 2 \left( \int X(p, q) 1_{|X| \leq \eta} \mu_{n,j}(dX, \omega) \right)^2 + 2 \eta^2 \left( \mu_{n,j}(|X| > \delta, \omega) \right)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$k_n(t_1, \omega) \sum_{j=1}^n \left( \int X(p, 1) 1_{|X| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) \right)^2 \leq$$

$$\leq 2 k_n(t_1, \omega) \sum_{j=1}^n \left( \int X(p, q) 1_{|X| \leq \eta} \mu_{n,j}(dX, \omega) \right)^2 +$$

$$+ 2 \eta^2 p_n(\{|X| > \delta\} \times [0, t_e], \omega) \max \{ \mu_{n,j}(|X| > \delta, \omega) \mid j=1, \dots, k_n(1, \omega) \} \rightarrow 0$$

nach i)', ii)' und 1.4.

Man zeigt:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_n k_n(t_1, \omega) \sum_{j=1}^n \int X(p, q) X(p', q') 1_{|X| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) = b_0(t_1, \omega)(p, q, p', q')$$

zu  $\delta$  wählt man ein  $\delta' < \delta$  und ein  $\delta'' \in [\delta, 2\delta]$  mit

$$v(\partial\{|X| \leq \delta'\} \times [0, t_k], \omega) = v(\partial\{|X| \leq \delta''\} \times [0, t_k], \omega) = 0$$

Zunächst gilt damit für jede stetige Funktion  $f: M^M \rightarrow \mathbb{R}^L$ :

$$(1.7) \quad \lim_n \int f(X) 1_{\delta' < |X| \leq \eta} p_n(dX \times [0, t_1], \omega) = \int f(X) 1_{\delta' < |X| \leq \eta} v(dX \times [0, t_1], \omega);$$

$$k_n(t_1, \omega) \sum_{j=1}^n \int X(p, q) X(p', q') 1_{|X| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) - b_0(t_1, \omega)(p, q, p', q') =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{k_n(t_1, \omega)} \int X(p, q) X(p', q') 1_{|X| \leq \eta} \mu_{n,j}(dX, \omega) - b_0(\eta, t_1, \omega)(p, q, p', q') - \\
 &- ( \int X(p, q) X(p', q') 1_{\delta' < |X| \leq \eta} P_n(dX \times [0, t_1], \omega) - \\
 &- \int X(p, q) X(p', q') 1_{\delta' < |X| \leq \eta} v(dX \times [0, t_1], \omega) ) + \\
 &+ \int X(p, q) X(p', q') 1_{\delta' < |X| \leq \delta} P_n(dX \times [0, t_1], \omega) + \\
 &+ \int X(p, q) X(p', q') 1_{|X| \leq \delta} v(dX \times [0, t_1], \omega)
 \end{aligned}$$

Mit iii)', (1.4) und (1.7) folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 &\overline{\lim}_n \left| \sum_{j=1}^{k_n(t_1, \omega)} \int X(p, q) X(p', q') 1_{|X| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) - b_0(t_1, \omega)(p, q, p', q') \right| \leq \\
 &\leq \overline{\lim}_n \int |X(p, q)| |X(p', q')| 1_{\delta' < |X| \leq \delta} P_n(dX \times [0, t_1], \omega) + \\
 &+ \overline{\lim}_n \int |X(p, q)| |X(p', q')| 1_{|X| \leq \delta} v(dX \times [0, t_1], \omega) \leq \\
 &\leq \overline{\lim}_n \int 2 |X|^2 1_{\delta' < |X| \leq \delta} P_n(dX \times [0, t_1], \omega) + \\
 &+ \int 2 |X|^2 1_{|X| \leq \delta} v(dX \times [0, t_1], \omega) \leq 4 \int |X|^2 1_{|X| \leq \delta} v(dX \times [0, t_1], \omega) \leq \\
 &\leq 4 \int |X|^2 1_{|X| \leq 2\delta} v(dX \times [0, t_1], \omega) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

$$d \in \mathbb{R}, (d(n, \delta))_{n, \delta} \subseteq \mathbb{R} \text{ und } \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_n |d(n, \delta) - d| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_n \frac{d(n, \delta)}{\lim_n} d(n, \delta) = d, \text{ also gilt:}$$

$$\begin{aligned}
 (1.8) \quad &\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_n \sum_{j=1}^{k_n(t_1, \omega)} \int X(p, q) X(p', q') 1_{|X| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) = \\
 &= b_0(t_1, \omega)(p, q, p', q'); \quad u^T X = \sum_{p, q=1}^M u_{(q-1)M+p} X(p, q) \Rightarrow \\
 &(u^T X)^2 = \sum_{p, q, p', q'=1}^M u_{(q-1)M+p} u_{(q'-1)M+p'} X(p, q) X(p', q) \\
 &\sum_{j=1}^{k_n(t_1, \omega)} ( \int u^T X 1_{|X| \leq \delta} \mu_{n,j}(dX, \omega) )^2 =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \frac{k_n(1, \omega)}{j} \left( \sum_{p, q=1}^M u_{(q-1)M+p} \int_{\|X\| \leq \delta} X(p, q) 1_{\|X\| \leq \delta} \mu_{n, j}(dX, \omega) \right)^2 \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^k \frac{k_n(1, \omega)}{j} M^2 \max_{p, q} \left( \int_{\|X\| \leq \delta} X(p, q) 1_{\|X\| \leq \delta} \mu_{n, j}(dX, \omega) \right)^2 \leq \\ & \leq M^2 \sum_{p, q=1}^M \frac{k_n(1, \omega)}{j} \left( \int_{\|X\| \leq \delta} X(p, q) 1_{\|X\| \leq \delta} \mu_{n, j}(dX, \omega) \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ nach (1.6)} \end{aligned}$$

Mit (1.8) folgt dann:

$$\begin{aligned} (1.8)' \quad & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lim_n}{\lim_n} \sum_{j=k_n(t_{l-1}, \omega)+1}^{k_n(t_l, \omega)} \int (u^T X)^2 1_{\|X\| \leq \delta} \mu_{n, j}(dX, \omega) = \\ & = \sum_{p, q, p', q'=1}^M u_{(q-1)M+p} u_{(q'-1)M+p'} (b_o(t_l, \omega)(p, q, p', q') - \\ & - b_o(t_{l-1}, \omega)(p, q, p', q')) + \Phi(u, v; t_{l-1}, t_l, \omega) := \\ & := \sum_{p, q, p', q'=1}^M u_{(q-1)M+p} v_{(q'-1)M+p'} (b_o(t_l, \omega)(p, q, p', q') - \\ & - b_o(t_{l-1}, \omega)(p, q, p', q')) \end{aligned}$$

dann gilt iii)" mit diesem  $\Phi$ ; dann ist  $\Phi$  als Funktion in  $u$  und  $v$  bilinear, symmetrisch (was man sofort sieht) und nicht negativ, da  $\Phi(u, u; t_{l-1}, t_l, \omega)$  der Grenzwert nicht negativer Folgen ist, also ist  $\Phi$  eine Kovarianz.

Nach [1], 2.4 Übung 9 gilt damit (für jedes  $l$ ):

$$\begin{aligned} & \lim_n \int e^{iu^T X} \left( \sum_{j=k_n(t_{l-1}, \omega)+1}^{k_n(t_l, \omega)} \mu_{n, j}(\cdot, \omega) \right) (dX) = \\ & = \exp \left\{ iu^T (a(n, t_l, \omega) - a(n, t_{l-1}, \omega)) - \frac{1}{2} \Phi(u, u; t_{l-1}, t_l, \omega) + \right. \\ & \quad \left. + \int (e^{iu^T X} - 1 - iu^T X 1_{\|X\| \leq n}) v(dX \times ]t_{l-1}, t_l], \omega) \right\} =: \phi_1(u, \omega) \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit wegen führt man Hilfsvariable  $Z_{n, j}$  ein, wobei  $Z_{n, j}$  die Verteilung  $\mu_{n, j}(\cdot, \omega)$  haben soll. Also:

$$\lim_n E \exp \left\{ i \sum_{l=1}^k u_l^T \frac{\sum_{j=k_n(t_{l-1}, \omega)+1}^{k_n(t_l, \omega)} Z_{n,j}}{k_n(t_{l-1}, \omega)+1} \right\} = \phi(u_1, \dots, u_k; \omega) = \prod_{l=1}^k \phi_l(u_l, \omega)$$

Insbesondere hat keines der  $\phi_l$  eine Nullstelle, da es charakteristische Funktionen von unendlich teilbaren Verteilungen sind.

$$\text{Also ist } \lim_n \prod_{l=1}^k \prod_{j=k_n(t_{l-1}, \omega)+1}^{k_n(t_l, \omega)} E e^{iu_l^T Z_{n,j}} = \prod_{l=1}^k \phi_l(u_l, \omega)$$

Beachtet man nun, daß oben  $n_1$  durch  $n$  ersetzt wurde und daß  $E e^{iu_l^T Z_{n,j}} =$

$$= \int e^{iu_l^T x} \mu_{n,j}(dx, \omega) = E(e^{iu_l^T X_{n,j}^C} | \mathcal{F}_{n,j-1}) (\omega) \quad \text{für fast alle } \omega$$

ist, so hat man für jeden Vektor  $(u_1, \dots, u_1)$ :

$$\lim_{n_1} \prod_{l=1}^k \prod_{j=k_{n_1}(t_{l-1})+1}^{k_{n_1}(t_l)} E(e^{iu_l^T X_{n_1,l}^C} | \mathcal{F}_{n_1,j-1}) = \prod_{l=1}^k \phi_l(u_l) \text{ f.s.}$$

Insbesondere gilt: Jede Teilfolge  $(n') \subset (n)$  enthält eine Teilfolge  $(n_1) \subset (n')$  mit dieser f.s. Konvergenz, also folgt:

$$(1.9) \quad \prod_{l=1}^k \prod_{j=k_n(t_{l-1})+1}^{k_n(t_l)} E(e^{iu_l^T X_{n,j}^C} | \mathcal{F}_{n,j-1}) \rightarrow \prod_{l=1}^k \phi_l(u_l) \text{ n.W.}$$

Mit Folgerung A. 6 ergibt sich daher:

$$E \left( \prod_{l=1}^k \prod_{j=k_n(t_{l-1})+1}^{k_n(t_l)} e^{iu_l^T X_{n,j}^C} | \mathcal{F}_0 \right) \rightarrow \prod_{l=1}^k \phi_l(u_l) \text{ n.W.}$$

für  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^{M^2}$  setze  $n_l := \sum_{j=1}^L v_j$ ,  $l=1, \dots, k$

$$\sum_{l=1}^k \prod_{j=k_n(t_{l-1})+1}^{k_n(t_l)} e^{iu_l^T X_{n,j}^C} = \exp \left\{ i \sum_{l=1}^k u_l^T (X_n^C(t_l) - X_n(t_{l-1})) \right\} =$$

$$= \exp \left\{ i \sum_{l=1}^{k-1} (u_l - u_{l-1})^T X_n^C(t_l) + i u_k^T X_n^C(t_k) \right\} =$$

$$= \exp \left\{ i \sum_{l=1}^k v_l^T X_n^C(t_1) \right\};$$

Sei  $\phi(v_1, \dots, v_k) := \prod_{l=1}^k \phi_1 \left( \sum_{j=1}^k v_j \right)$ , dann gilt

$$(1.10) \quad E \left( \exp \left\{ i \sum_{l=1}^k v_l^T X_n^C(t_1) \right\} \mid f_0 \right) + \phi(v_1, \dots, v_k) \text{ n.W.}$$

Sie die Bedingung 1 aus dem Satz erfüllt, dann gilt

$E \exp \{ i v_0^T Y_{n,0}^C \} + E \exp \{ i v_0^T Y_0^C \}$  mit (1.10) folgt:

$$E \exp \left\{ i v_0^T Y_{n,0}^C + i \sum_{l=1}^k v_l^T X_n^C(t_1) \right\} + E e^{i v_0^T Y_0^C} E \phi(v_1, \dots, v_k)$$

$$\Rightarrow 2) \text{ mit } \psi(v_0, \dots, v_k) = E \exp \{ i v_0^T Y_0^C \} E \phi(v_1, \dots, v_k)$$

Sei die Bedingung 2 aus dem Satz erfüllt;

$$\begin{aligned} E \exp \left\{ i v_0^T Y_0^C + i \sum_{l=1}^k v_l^T X_n^C(t_1) \right\} &= \\ = E e^{i v_0^T Y_0^C} E \left( \exp \left\{ i \sum_{l=1}^k v_l^T X_n^C(t_1) \right\} \mid f_0 \right) + E e^{i v_0^T Y_0^C} \phi(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

$$\left| E \exp \left\{ i v_0^T Y_{n,0}^C + i \sum_{l=1}^k v_l^T X_n^C(t_1) \right\} - \right.$$

$$\left. - E \exp \left\{ i v_0^T Y_0^C + i \sum_{l=1}^k v_l^T X_n^C(t_1) \right\} \right| \leq E \left| e^{i v_0^T (Y_{n,0}^C - Y_0^C)} - 1 \right| + 0$$

$$\Rightarrow 2) \text{ mit } \phi(v_0, \dots, v_k) = E e^{i v_0^T Y_0^C} \phi(v_1, \dots, v_k)$$

Die Bedingung 3 führt man auf den zweiten Fall zurück durch die

Definition  $\tilde{f}_{n,j} := \sigma(Y_0) \vee f_{n,j}$ , dann ist

$$P(X_{n,j} \in \cdot \mid f_{n,j-1}) = P(X_{n,j} \in \cdot \mid \tilde{f}_{n,j-1}) \text{ f.s. } \forall n, j \text{ d.h.}$$

die Voraussetzungen sind mit  $(\tilde{f}_{n,j})_{n,j}$  erfüllt und es folgt 2) mit

$$\phi(v, \dots, v_k) = E e^{i v_0^T Y_0^C} \phi(v_1, \dots, v_k)$$

- 3) Man zeigt: Es gibt stochastisch stetige Prozesse  $X$  und  $Y$  und eine Zufallsvariable  $Y_0$ , so daß  $(X_{n,0}, X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (Y_0, X, Y)$ .

Dazu zeigt man zunächst, daß  $(Y_{n,0}^C, X_n^C, Y_n^C)$  für jedes feste  $C \in (C_r)_r$  in Verteilung konvergiert. Nach 1.3) ist die Folge relativ kompakt, also nimmt man an, daß sie zwei verschiedene Häufigkeitspunkte hat, also: Es gibt Teilfolgen  $(n_1)$  und  $(m_1)$  mit

$$(Y_{n_1,0}^C, X_{n_1}^C, Y_{n_1}^C) \xrightarrow{D} P_1, (Y_{m_1,0}^C, X_{m_1}^C, Y_{m_1}^C) \xrightarrow{D} Q_1 \text{ und } P_1 \neq Q_1.$$

Nach (1.3) gibt es dann Teilfolgen  $(n_2) \subseteq (n_1)$  und  $(m_2) \subseteq (m_1)$ , für die die Voraussetzung 1 erfüllt ist, nach 2) und Bemerkung 6 folgt für diese Teilfolge: Es gibt  $(Y_0^C, X^C, Y^C)$  mit

$$(Y_{n_2,0}^C, X_{n_2}^C, Y_{n_2}^C) \xrightarrow{D} (Y_0^C, X^C, Y^C) \text{ und } (Y_{m_2,0}^C, X_{m_2}^C, Y_{m_2}^C) \xrightarrow{D} (Y_0^C, X^C, Y^C).$$

Daraus folgt aber  $P_1 = P(X_0^C, X^C, Y^C)^{-1} = Q_1$ , also konvergiert

$$(Y_{n,0}^C, X_n^C, Y_n^C)^{-1}_n \text{ für jedes } C \in (C_r)_r.$$

Damit gilt also: zu jedem  $r$  gibt es ein  $Y_0^r$  und stochastisch stetige

$$\text{Prozesse, } X^r, Y^r \text{ mit } (Y_{n,0}^r, X_n^r, Y_n^r) \xrightarrow{D} (Y_0^r, X^r, Y^r).$$

Aus der Definition der abgeschnittenen Prozesse ergibt sich:

$$\{ (Y_{n,0}^r, X_n^r, Y_n^r) \neq (Y_{n,0}, X_n, Y_n) \} \subseteq$$

$$\subseteq \{ |Y_{n,0}| > C_r \} \cup \{ \max \{ \|X_{n,j}\| \mid j=1, \dots, k_n(1) \} > C_r \}; \text{ sei}$$

$$\epsilon > 0; P( |Y_{n,0} - Y_{n,0}^r| + \sup_t \|X_n(t) - X_n^r(t)\| + \sup_t \|Y_n(t) - Y_n^r(t)\| > \epsilon)$$

$$\leq P(|Y_{n,0}| > C_r) + P(\max \{ \|X_{n,j}\| \mid (j=1, \dots, k_n(1)) \} > C_r)$$

$$\leq P(|Y_{n,0}| > C_r) + P(N_n(\{ \|X\| > C_r\} \times (0,1)) \leq 1)$$

wobei man definiert:

$$N_n(A \times [0,1]) := \sum_{j=1}^{k_n(1)} 1_A(X_{n,j}).$$

Nach Voraussetzung 4 ii) und Wahl von  $(C_r)_r$  gilt:

$$P_n ( \{ |X| > C_r \} \times [0,1] ) + v ( \{ |X| > C_r \} \times [0,1] ) \text{ n.w.}$$

$$E ( e^{iu A(X_{n,j})} | f_{n,j-1} ) = E ( 1 + (e^{iu} - 1) 1_A(X_{n,j}) | f_{n,j-1} ) = \\ = 1 + (e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A) ;$$

$$\left| \prod_{j=1}^k (1 + (e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A)) - \prod_{j=1}^k e^{(e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A)} \right| \leq \\ \leq \sum_{j=1}^k \left| \prod_{l=1}^{j-1} (1 + (e^{iu} - 1) P_{n,l-1}(A)) \right| \cdot \left| 1 + (e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A) - e^{(e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A)} \right| \cdot \\ \cdot \left| \prod_{l=j+1}^k e^{(e^{iu} - 1) P_{n,l-1}(A)} \right| ;$$

$$\left| 1 + (e^{iu} - 1) P_{n,l-1}(A) \right| \leq 1 + 2 P_{n,l-1}(A) \leq e^{2 P_{n,l-1}(A)}$$

$$\left| 1 + (e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A) - e^{(e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| (e^{iu} - 1) P_{n,m-1}(A) \right|^2 \exp \{ \left| (e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A) \right| \} \leq$$

$$\leq e^{\frac{2}{2} \frac{u^2}{2} P_{n,j-1}(A)}, \text{ da } \left| e^2 - 1 - 2 \right| \leq \frac{|z|^2}{2} e^{|z|}$$

$$\left| e^{(e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A)} - 1 \right| = \left| \exp \{ (\cos u - 1) P_{n,j-1}(A) + i (\sin u) P_{n,j-1}(A) \} \right| \leq 1$$

insgesamt:

$$\left| \prod_{j=1}^k (1 + (e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A)) - \prod_{j=1}^k e^{(e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(A)} \right| \leq$$

$$\leq e^{\frac{2}{2} \frac{u^2}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{j-1} e^{2 P_{n,l-1}(A)} P_{n,l-1}(A)} \leq$$

$$\leq e^{\frac{2}{2} \frac{u^2}{2} \exp \{ 2 \sum_{l=1}^k P_{n,l-1}(A) \} \sum_{j=1}^k P_{n,j-1}(A) \max_{j=1}^k P_{n,j-1}(A)}, \text{ also}$$

$$\left| \prod_{j=1}^k (1 + (e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(|X| > C_r)) - \prod_{j=1}^k \exp \{ (e^{iu} - 1) P_{n,j-1}(|X| > C_r) \} \right| \leq$$

$$\leq e^{\frac{2}{2} \frac{u^2}{2} \exp \{ 2 P_n(\{|X| > C_r\} \times [0,1]) \} \cdot P_n(\{|X| > C_r\} \times [0,1])}.$$

$$\cdot \max \{ p_{n,j-1} ( \|X\| > C_r \mid j=1, \dots, k_n(1) ) + 0 \text{ n.W.}$$

nach Voraussetzung 4 i) und ii).

$$\begin{aligned} \text{Andererseits gilt } & \prod_{j=1}^{k_n(1)} \exp \{ (e^{iu}-1) p_{n,j-1} ( \|X\| > C_r ) \} = \\ & = \exp \{ p_n ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) (e^{iu}-1) \} \\ & + \exp \{ v ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) (e^{iu}-1) \} \text{ n.W.} \end{aligned}$$

Daraus folgt aber dann:

$$\prod_{j=1}^{k_n(1)} E(\exp\{iu \cdot 1_{\|X_{n,j}\| < C_r}\} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}) + \exp\{(e^{iu}-1) v(\{\|X\| > C_r\} \times [0,1])\} \text{ n.W.}$$

Mit Folgerung A. 6 ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(\exp \{ iu N_n ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) \} \mid \mathcal{F}_0) + \\ + \exp \{ (e^{iu}-1) v ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) \} \text{ n.W.} \end{aligned}$$

Sei  $N_v ( \{ \|X\| > C_r \} \times (0,1) )$  die Zufallsvariable mit der charakteristischen Funktion  $E \exp \{ (e^{iu}-1) v ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) \}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} N_n ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) + N_v ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) \\ \Rightarrow \lim_n P ( N_n ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) \geq 1 ) = P ( N_v ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) \geq 1 ) \end{aligned}$$

$$v ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) \rightarrow 0 \text{ f.s. für } r \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} P ( N_v ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) \geq 1 ) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \overline{\lim}_n P ( N_n ( \{ \|X\| > C_r \} \times [0,1] ) \geq 1 ) = 0$$

$$\text{Weiterhin war } \lim_{r \rightarrow \infty} \overline{\lim}_n P ( \|Y_{m,0}\| > C_r ) = \lim_{r \rightarrow \infty} P ( \|Y_0\| > C_r ) = 0$$

Daraus folgt aber nun für alle  $\varepsilon > 0$ :

$$(1.11) \lim_{r \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} P ( \|Y_{n,0} - Y_{n,0}^{C_r}\| + \sup_t \|X_n(t) - X_n^{C_r}(t)\| + \sup_t \|Y_n^{C_r}(t)\| > \varepsilon ) = 0$$

Mit Satz A. 1 folgt daraus:

Es gibt  $Y_0, X$  und  $Y$ , so daß  $(Y_{n,0}, X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (Y_0, X, Y)$  und  
 $(Y_0^{\text{C}_r}, X^{\text{C}_r}, Y^{\text{C}_r}) \xrightarrow{D} (Y_0, X, Y)$ . Noch gezeigt werden muß, daß  $X$  und  $Y$

stochastisch stetig sind. Sei  $t \in ]0,1]$ ; falls für  $t'_m \rightarrow t$ ,  $t'_m < t$  gilt,

$\|X(t) - X(t'_m)\| \rightarrow 0$  n.W., dann ist  $X$  stochastisch stetig.

(denn da  $X$  cadlag-Funktion ist, ist für  $S_m \rightarrow t$ ,  $S_m \geq t$ :

$$\|X(S_m) - X(t)\| \rightarrow 0 \text{ f.s.})$$

$T_X = \{t \in [0,1] \mid P_X^{-1}\{x \mid y \rightarrow y(t) \text{ ist stetig in } x\} = 1\}$ ,

dann ist  $0,1 \in T_X$ ;  $t \in T_X$  mit  $0 < t < 1$  genau dann, wenn

$P(X(t) \neq X(t-)) = 0$ . Für  $t_1, \dots, t_k \in T_X$  gilt:

$$(X_n^{\text{C}_r}(t_1), \dots, X_n^{\text{C}_r}(t_k)) \xrightarrow{D} (X(t_1), \dots, X(t_k)). \quad T_X \text{ dicht in } [0,1].$$

Zu den oben gewählten  $t$ ,  $t'_m$  gibt es  $(t_m)_m, (S_m)_m \in T_X$  mit  $t'_m < t_m < t \leq S_m$

und  $P(\|X(t_m) - X(t'_m)\| > \frac{1}{m}) < \frac{1}{m}$  und  $P(\|X(S_m) - X(t)\| > \frac{1}{m}) < \frac{1}{m} \forall m$ .

Sei also  $\varepsilon > 0$  beliebig, dann ist für  $m > m_1$ :  $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}$ :

$$P(\|X(t) - Y(t'_m)\| > \varepsilon) \leq P(\|X(t_m) - X(S_m)\| > \frac{\varepsilon}{m}) +$$

$$+ P(\|X(t_m) - X(t'_m)\| > \frac{1}{m}) + P(\|X(S_m) - X(t)\| > \frac{1}{m}) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + P(\|X(t_m) - X(S_m)\| > \frac{\varepsilon}{2})$$

Nach (1.11) gilt:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(\sup_t \|X_n(t) - X_n^{\text{C}_r}(t)\| > \delta) = 0 \forall \delta > 0$

Wähle zu  $\frac{\varepsilon}{8}$  ein  $r$  mit  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(\sup_t \|X_n(t) - X_n^{\text{C}_r}(t)\| > \frac{\varepsilon}{8}) < \frac{\varepsilon}{8}$ ;

$X^{\text{C}_r}$  ist stochastisch stetig, also gibt es zu  $\frac{\varepsilon}{4}$  ein

$$\delta \text{ mit } \sup_{(t-S) \leq \delta} P(\|X^{\text{C}_r}(t) - X^{\text{C}_r}(S)\| \geq \frac{\varepsilon}{4}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

(siehe [19], III. 2, Theorem 4), also für ein  $m_2 > m_1$  ist  $|t_m - s_m| < \delta$

und damit  $P(\|X^C(t_m) - X^C(s_m)\| > \frac{\epsilon}{4}) \leq \frac{\epsilon}{4} \forall m \geq m_2$

$$\begin{aligned} P(\|X(t_m) - X(s_m)\| > \frac{\epsilon}{2}) &\leq \frac{\lim}{n} P(\|X_n(t_m) - X_n(s_m)\| > \frac{\epsilon}{2}) \leq \\ &\leq \frac{\lim}{n} (2 P(\sup_t \|X_n^C(t) - X_n(t)\| > \frac{\epsilon}{8}) + P(\|X_n^C(t_m) - X_n(s_m)\| > \frac{\epsilon}{4})) \leq \\ &\leq 2 \overline{\lim}_n P(\sup_t \|X_n^C(t) - X_n(t)\| > \frac{\epsilon}{8}) + \\ &\quad + \overline{\lim}_n P(\|X_n^C(t_m) - X_n^C(s_m)\| \geq \frac{\epsilon}{4}) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + P(\|X^C(t_m) - X^C(s_m)\| \geq \frac{\epsilon}{4}) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall m \geq m_2 \quad \text{und damit ist dann} \end{aligned}$$

$P(\|X(t) - X(s)\| > \epsilon) < \epsilon \forall m \geq m_2$ , also  $X$  stochastisch stetig.

Der Beweis für  $Y$  läuft analog. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Die Voraussetzungen werden etwas einfacher, wenn man die Prozesse  $X_n$  zentriert. Dazu setzt man  $Z_{n,j} := X_{n,j} - E_{n,j-1}$ ,  $|X_{n,j}| \leq \eta$  und mit  $Z_{n,j}$  definiert man nun

$$\begin{aligned} Z_n(t) &:= \sum_{j=1}^{k_n(t)} Z_{n,j}; \\ Z_{n,0}^Y &:= Y_{n,0}, \quad Z_{n,j+1}^Y := Z_{n,j}^Y + h_n(T_{n,j}, \sum_{i=1}^j Z_{n,i}, \tilde{Z}_{n,j}^Y) Z_{n,j+1}, \quad j \geq 0 \\ Z_n^Y(t) &:= \tilde{Z}_{n,j}^Y \quad \text{für } T_{n,j} \leq t < T_{n,j+1}, \text{ also ist} \\ Z_n^Y(t) &= Y_{n,0} + \sum_{j=1}^{k_n(t)} h_n(T_{n,j-1}, Z_n(T_{n,j-1}), Z_n^Y(T_{n,j-1})) Z_{n,j}; \end{aligned}$$

#### 10. Folgerung

Sind Voraussetzung 3, Voraussetzung 4 i), ii), iii) und eine der Bedingungen 1), 2) oder 3) aus Satz 9 erfüllt, dann gibt es eine Zufallsvariable  $Y_0$  und stochastisch stetige Prozesse  $Z$  und  $Z^Y$ , so daß  $(Y_{n,0}, Z_n, Z_n^Y) \xrightarrow{D} (Y_0, Z, Z^Y)$



Beweis:

Man weist nach, daß für  $(Z_n)_n$  die Voraussetzungen 4 und 5 erfüllt sind. Dazu definiert man  $q_{n,j-1}(\cdot)$  als eine reguläre Version von

$$P(Z_{n,j} \in \cdot \mid f_{n,j-1}) \text{ und } q_n(\cdot \times [0, t]) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} q_{n,j-1}(\cdot);$$

Für  $\delta < \eta$  gilt

$$\|E_{n,j-1} X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}\| \leq \delta + \eta P(\|X_{n,j}\| > \delta \mid f_{n,j-1}), \text{ mit}$$

4 i) folgt daraus

$$(1.12) \max \{ \|E_{n,j-1} X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}\| \mid j=1, \dots, k_n(1) \} \rightarrow n.W.$$

$$\text{Mit } P(\|Z_{n,j}\| \geq 2\delta \mid f_{n,j-1}) \leq$$

$$\leq P(\|X_{n,j}\| \geq \delta \mid f_{n,j-1}) + P(\|E_{n,j-1} X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}\| \geq \delta \mid f_{n,j-1}) \leq$$

$$\leq P(\|X_{n,j}\| \geq \delta \mid f_{n,j-1}) + \frac{1}{\delta} \|E_{n,j-1} X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}\| \text{ folgt dann}$$

$$(1.13) \max \{ P(\|Z_{n,j}\| > \delta \mid f_{n,j-1}) \mid j=1, \dots, k_n(1) \} \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall \delta > 0$$

Für 4 ii) zeigt man zunächst :  $t \in D_1, \nu(\partial \{\|X\| \leq \delta\} \times [0, 1]) = 0$  f.s.,

$f: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und gleichmäßig stetig, dann gilt

$$(1.14) \int f q_n(\cdot \times [0, t]) \Big|_{\|X\| > \delta} (dx) + \int f \nu(\cdot \times [0, t]) \Big|_{\|X\| > \delta} (dx) \rightarrow n.W.$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$\int f p_n(\cdot \times [0, t]) \Big|_{\|X\| > \delta} (dx) + \int f \nu(\cdot \times [0, t]) \Big|_{\|X\| > \delta} (dx) \rightarrow n.W.$$

Also muß gezeigt werden:

$$\int f q_n(dX \times [0, t]) \Big|_{\|X\| > \delta} - \int f dp_n(dX \times [0, t]) \Big|_{\|X\| > \delta} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n(t)} E(f(Z_{n,j}) 1_{\|Z_{n,j}\| > \delta} \mid f_{n,j-1}) - \sum_{j=1}^{k_n(t)} E(f(X_{n,j}) 1_{\|X_{n,j}\| > \delta} \mid f_{n,j-1}) \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

$$\text{Mit } \delta' > \delta, \nu(\partial \{\|X\| \leq \delta'\} \times [0, 1]) = \nu(\partial \{\|X\| \leq \delta - \delta'\} \times [0, 1]) = 0 \text{ f.s.}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{gilt: } | E(f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|Z_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) - E(f(X_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) | \leq \\
 & \leq | E(f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|Z_{n,j}\| > \delta} - 1_{\|X_{n,j}\| > \delta}) | f_{n,j-1}) | + \\
 & \quad + | E(f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) | \leq \\
 & \leq E(| f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|Z_{n,j}\| > \delta} - 1_{\|X_{n,j}\| > \delta}) | f_{n,j-1}) + \\
 & \quad + E(| f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) + \\
 & \quad + | E(f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|Z_{n,j}\| > \delta} - 1_{\|X_{n,j}\| > \delta}) | f_{n,j-1}) | + \\
 & \quad + E(| f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1})
 \end{aligned}$$

$$\text{a) } \sum_{j=1}^{k_n(t)} E(| f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

Wähle  $\epsilon_0$  so klein, daß  $P(\epsilon_0 \vee (\|X\| > \delta) \times [0,1]) \geq \epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}$ ;

zu  $\epsilon_0$  wähle in  $\delta''$ , so daß:  $\|x - y\| \leq \delta'' \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon_0$ ;

auf der Menge  $\{ \max_{j=1, \dots, k_n(1)} \|E_{n,j-1} X_{n,j} - X_{n,j}\| \leq \delta'' \}$

$$\begin{aligned}
 & \text{gilt: } \sum_{j=1}^{k_n(t)} E(| f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) = \\
 & = \sum_{j=1}^{k_n(t)} 1_{\|E_{n,j-1} X_{n,j} - X_{n,j}\| \leq \delta''} E(| f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) \leq \\
 & \leq \epsilon_0 P_n(\|X\| > \delta) \times [0, t]
 \end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
 & \overline{\lim}_n P(\sum_{j=1}^{k_n(t)} E(| f(Z_{n,j}) - f(X_{n,j}) | 1_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) \geq \delta) \leq \\
 & \leq \overline{\lim}_r P(\max_{j=1, \dots, k_n(1)} \|E_{n,j-1} X_{n,j} - X_{n,j}\| \geq \delta'' > \delta'') + \\
 & + \lim P(\epsilon_0 P_n(\|X\| > \delta) \times [0, t] \geq \epsilon) \leq \\
 & \leq P(\epsilon_0 \vee (\|X\| > \delta) \times [0, t] \geq \epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}
 \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{\delta' \rightarrow \delta} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=1}^{k_n(t)} E \left( |f(Z_{n,j})| \mid 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \delta'} \mid f_{n,j-1} \right) \geq \varepsilon \right) = 0$$

$$\|f\| := \sup_x |f(x)|;$$

$$k_n(t) \sum_{j=1}^n E \left( |f(Z_{n,j})| \mid 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \delta'} \mid f_{n,j-1} \right) \leq$$

$$\leq \|f\| P_n(\{\delta < \|X\| \leq \delta'\} \times [0, t])$$

$$\lim_{\delta' \rightarrow \delta} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=1}^{k_n(t)} E \left( |f(Z_{n,j})| \mid 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \delta'} \mid f_{n,j-1} \right) \geq \varepsilon \right) = ' \leq$$

$$\leq \lim P \left( \|f\| \vee (\{\delta < \|X\| \leq \delta'\} \times [0, t]) \geq \varepsilon \right) = 0$$

c)

$$\lim_{\delta' \rightarrow \delta'} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=1}^{k_n(t)} E \left( |f(Z_{n,j})| \mid 1_{\|Z_{n,j}\| > \delta'} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \delta'} \mid f_{n,j-1} \right) \geq \varepsilon \right) = 0$$

Auf der Menge

$$\{ \max \{ \|E_{n,j-1} X_{n,j}\| 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \mid j=1, \dots, k_n(1) \leq \delta' - \delta \} \text{ ist}$$

$$k_n(t) \sum_{j=1}^n E \left( |f(Z_{n,j})| \mid 1_{\|Z_{n,j}\| > \delta} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \delta'} \mid f_{n,j-1} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n(t)} 1_{\|E_{n,j-1} X_{n,j}\| 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \leq \delta' - \delta} E \left( |f(Z_{n,j})| \mid \right.$$

$$\left. \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| > \delta} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \delta} \mid f_{n,j-1} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_n(t)} \|f\| E \left( 1_{\|X_{n,j}\| > 2\delta - \delta'} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \delta'} \mid f_{n,j} \right) =$$

$$= \|f\| P_n(\{2\delta - \delta' < \|X\| \leq \delta'\} \times [0, t]) \Rightarrow$$

$$\lim_{\delta \rightarrow \delta'} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=1}^{k_n(t)} E \left( |f(Z_{n,j})| \mid 1_{\|Z_{n,j}\| < \delta} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \delta'} \mid f_{n,j-1} \right) \leq \right.$$

$$\leq \lim_{\delta \rightarrow \delta'} \overline{\lim}_n P \left( \max \{ \|E_{n,j-1} X_{n,j}\| 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \mid j=1, \dots, k_n(t) \} > \delta' - \delta \right) +$$

$$+ \lim_{\delta' \rightarrow \delta} \overline{\lim}_n P \left( \|f\| P_n(\{2\delta - \delta' < \|X\| \leq \delta'\} \times [0, t]) \geq \varepsilon \right) =$$

$$= \lim_{\delta' \rightarrow \delta} P ( \| f \| \vee ( \{ 2\delta' - \delta' < \| x \| \leq \delta' \} \times [0, t] ) \geq \varepsilon ) = 0$$

(1.12) 4 ii)

$$d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P ( \bigcap_{j=1}^{k_n(t)} E ( | f(z_{n,j}) | | 1_{\|z_{n,j}\| > \delta} - 1_{\|x_{n,j}\| > \delta} | 1_{\|x_{n,j}\| > \delta'} | f_{n,j-1} ) \geq \varepsilon ) =$$

$$\text{Man zeigt: } | 1_{\|z_{n,j}\| > \delta} - 1_{\|x_{n,j}\| > \delta} | 1_{\|x_{n,j}\| > \delta'} | E_{n,j-1} x_{n,j} 1_{\|x_{n,j}\| \leq \eta} | \leq \delta' - \delta \equiv 0$$

$$\text{zu betrachten ist 1) } \{ \| z_{n,j} \| < \delta \} \cap \{ \| x_{n,j} \| \leq \delta \} \text{ und}$$

$$2) \{ \| z_{n,j} \| \leq \delta \} \cap \{ \| x_{n,j} \| > \delta \}$$

$$(\text{in den anderen Fällen ist } | 1_{\|z_{n,j}\| > \delta} - 1_{\|x_{n,j}\| > \delta} | = 0)$$

$$1) \quad \| x_{n,j}(\omega) \| \leq \delta \Rightarrow 1_{\|x_{n,j}\| > \delta'}(\omega) = 0$$

$$2) \quad \| z_{n,j}(\omega) \| \leq \delta, \quad (E_{n,j-1} x_{n,j} 1_{\|x_{n,j}\| \leq \eta})(\omega) \leq \delta' - \delta$$

$$\Rightarrow \| x_{n,j}(\omega) \| \leq \delta'$$

$$\Rightarrow 1_{\|x_{n,j}\| > \delta'}(\omega) = 0$$

Damit gilt auf der Menge

$$\{ \max \{ \| E_{n,j-1} x_{n,j} 1_{\|x_{n,j}\| \leq \eta} \| \mid j=1, \dots, k_n(1) \} \leq \delta' - \delta \} :$$

$$\bigcap_{j=1}^{k_n(t)} E ( | f(z_{n,j}) | | 1_{\|z_{n,j}\| > \delta} - 1_{\|x_{n,j}\| > \delta} | 1_{\|x_{n,j}\| > \delta'} | f_{n,j-1} ) =$$

$$\bigcap_{j=1}^{k_n(t)} 1_{E_{n,j-1} x_{n,j} 1_{\|x_{n,j}\| \leq \eta} \leq \delta' - \delta} E ( | f(z_{n,j}) | | 1_{\|z_{n,j}\| > \delta} -$$

$$- 1_{\|x_{n,j}\| > \delta} | 1_{\|x_{n,j}\| > \delta'} | f_{n,j-1} ) = 0$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} P ( \bigcap_{j=1}^{k_n(t)} E ( | f(z_{n,j}) | | 1_{\|z_{n,j}\| > \delta} -$$

$$- 1_{\|x_{n,j}\| > \delta} | 1_{\|x_{n,j}\| > \delta'} | f_{n,j-1} ) \geq \varepsilon ) \leq$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \max \{ \| E_{n,j-1} X_{n,j} \|_{X_{n,j}} \mid j=1, \dots, k_n(1) \} > \delta' - \delta \right) = 0$$

Aus a) - d) und der Zerlegung vor a) folgt aber nun:

$$\lim_n P \left( \left| \sum_{j=1}^{k_n(t)} E(f(Z_{n,j}) \mathbb{1}_{\|Z_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) - \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{k_n(t)} E(f(X_{n,j}) \mathbb{1}_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) \right| \geq \varepsilon \right) \leq$$

$$\leq \lim_{\delta' \rightarrow \delta} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=1}^{k_n(t)} \left| E(f(Z_{n,j}) \mathbb{1}_{\|Z_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) - \right.$$

$$\left. E(f(X_{n,j}) \mathbb{1}_{\|X_{n,j}\| > \delta} | f_{n,j-1}) \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Damit ist (1.14) bewiesen. Nun benutzt man, daß es kompakte Mengen

$k_1 \subseteq k_2 \subseteq k_3 \subseteq \dots$  mit  $\bigcup_{m=1}^{\infty} k_m = \{ \|X\| > \delta \}$  gilt. Zu jedem  $k_m$  gibt es

eine (abzählbare) Menge  $\{f_{m,k}\}_{k=1,2,\dots}$  von Funktionen, die dicht in

$C(k_m, \mathbb{R})$  sind, wo  $C(k_m, \mathbb{R}) = \{f : k_m \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ ,

da  $k_m$  kompakt, sind alle  $f \in C(k_m, \mathbb{R})$  auch gleichmäßig stetig.

Zu jeder Teilfolge  $(n_1) \subseteq (n)$  gibt es nach (1.14) eine Teilfolge

$(n_2) \subseteq (n_1)$  (eine Diagonalfolge), so daß

$$\int f_{m,k} q_{n_2}(\cdot \times [0,t]) \Big|_{\|X\| > \delta} (dx) + \int f_{m,k} v(\cdot \times [0,t]) \Big|_{\{\|X\| > \delta\}} (dx) \text{ f.s.}$$

für alle  $m$  und  $k$  und

$$q_{n_2}(\{\|X\| > \delta\} \times [0,t]) + v(\{\|X\| > \delta\} \times [0,t]) \text{ f.s.}$$

(man wählt für die letzte Konvergenz in (1.14)

$$f(X) = \begin{cases} 1, & \|X\| > \delta \\ 0, & \|X\| < \frac{\delta}{2} \\ -1 + \frac{2}{\delta} \|X\|, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Mit [10], Theorem 1.1.5 und 1.1.9 folgt:

$$q_{n_2} (\cdot \times [0, t]) \Big|_{\|x\| > \delta} \xrightarrow{w} \nu (\cdot \times [0, t]) \Big|_{\|x\| > \delta} \text{ f.s.,}$$

damit gilt 4 ii) für  $(Z_{n,j})_{n,j}$ .

Man zeigt nun, daß auch die Bedingung 4 iii) für  $(Z_{n,j})_{n,j}$  erfüllt ist.

Dazu betrachtet man die folgende Differenz:

$$\begin{aligned} & E_{n,j-1} Z_{n,j}(p,q) Z_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - E_{n,j-1} Z_{n,j-1}(p,q) \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} \\ & E_{n,j-1} Z_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - (E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - \\ & \quad - E_{n,j} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) = \\ & = E_{n,j-1} Z_{n,j}(p,q) Z_{n,j}(p',q') \cdot (1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) + \\ & \quad + E_{n,j-1} (Z_{n,j}(p,q) Z_{n,j}(p',q') - X_{n,j}(p,q) X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \\ & \quad + E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} (X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \\ & \quad - E_{n,j-1} (X_{n,j}(c,p) - E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} \\ & \quad \cdot E_{n,j-1} (X_{n,j}(p',q') - E_{n,j-1} X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} = \\ & = E_{n,j-1} Z_{n,j}(p,q) Z_{n,j}(p',q') \cdot (1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) - \\ & \quad - 2 E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} + \\ & \quad + E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} + \\ & \quad + E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - \\ & \quad - E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} + \\ & \quad + E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - \\ & \quad - E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p',q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1}^2 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} \\
 = & E_{n,j-1} Z_{n,j}(p,q) Z_{n,j}(p'q') \cdot (1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) - \\
 & - E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - \\
 & - E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot (1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - \\
 & - E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} + \\
 & + E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot (1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \\
 & \quad \cdot E_{n,j} \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} + \\
 & + E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} \\
 & \quad E_{n,j-1} \cdot 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta}
 \end{aligned}$$

Kann man zeigen, daß wenn man

$K_{n\sum}^{(t)}$   $s_{n,j}$  betrachtet,  $s_{n,j}$  ist einer der Summanden nach dem letzten =, jeder der Summanden gegen 0 n.W. konvergiert, so gilt

4 iii) für  $(Z_{n,j})$ , da es für  $(X_{n,j})$  gilt.

1) Man zeigt für  $\delta' \in (0, \eta)$  :

$$| 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} | \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta - \delta'} \cdot 1_{E_{n,j-1} X_{n,j} \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \leq \delta'} = 0$$

Dies geht ebenso wie im Beweis zu 4 ii) Teil d). Damit gilt auf der Menge

$$\{ \max \{ | E_{n,j-1} X_{n,j} \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} | \mid j = 1, \dots, k_n(1) \} \leq \delta' \} :$$

$$\begin{aligned}
 & | K_{n\sum}^{(t)} E_{n,j-1} Z_{n,j}(p,q) Z_{n,j}(p'q') \cdot (1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) | = \\
 = & | K_{n\sum}^{(t)} \cdot 1_{E_{n,j-1} X_{n,j} \cdot 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \leq \delta'} E_{n,j-1} Z_{n,j}(p,q) Z_{n,j}(p'q') \\
 & \quad (1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta} - 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) | \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} \left| Z_{n,j}(p,q) \right| \cdot \left| Z_{n,j}(p',q') \right| \cdot \left| 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta}^{-1} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \right| \cdot \\ \cdot 1_{\|X_{n,j}\| > \eta - \delta} 1_{\|E_{n,j-1} X_{n,j}\| \leq \eta} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \delta}$$

$$\leq (\eta + \delta)^2 \cdot \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} 1_{\eta - \delta} < \|X_{n,j}\| \leq \eta + \delta$$

Sei  $(\delta_m)_m$  eine Folge mit  $\delta_m \rightarrow 0$ ,  $\nu(\partial\{\eta - \delta_m \leq \|X\| \leq \eta + \delta_m\} \times [0,1]) = 0$  f.s.  $\forall m$ ;

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Z_{n,j}(p,q) Z_{n,j}(p',q') \right| 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta}^{-1} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \right| > \varepsilon \right) \leq$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Z_{n,j}(p,q) Z_{n,j}(p',q') \right| 1_{\|Z_{n,j}\| \leq \eta}^{-1} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \right| > \varepsilon \right) \leq$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \max \{ \|E_{n,j} X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \| \mid j=1, \dots, k_n(1) \} > \delta_m \right) + \\ + \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( 2(\eta + \delta_m)^2 P_n \left( \{\eta - \delta_m \leq \|X\| \leq \eta + \delta_m\} \times [0,1] \right) > \varepsilon \right) \leq \quad (1.12)$$

$$\leq \lim P \left( \nu \left( \{\eta - \delta_m \leq \|X\| \leq \eta + \delta_m\} \times [0,1] \right) > \frac{\varepsilon}{2(\eta + \delta_1)^2} \right) = 0$$

da  $\nu \left( \partial \{ \|X\| \leq \eta \} \times (0,1) \right) = 0$  f.s.

$$2) \quad \max \{ \|E_{n,j-1} X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \| \mid j=1, \dots, k_n(1) \}$$

$$P_n \left( \{ \|X\| > \eta \} \times [0,1] \right) \rightarrow 0 \quad n.W.$$

wegen (1.12), also gilt:

$$\overline{\lim}_n P \left( \left| \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} X_{n,j}(p',q') \right| \right.$$

$$\left. 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} E_{n,j-1} 1_{\|X_{n,j}\| > \eta} \right| > \varepsilon \right) \leq$$

$$\leq \lim_n P \left( \max \{ \|E_{n,j-1} X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \| \mid j=1, \dots, k_n(1) \} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \eta P_n \left( \{ \|X\| > \eta \} \times [0,1] \right) > \varepsilon \right) = 0$$



3) Analog zu 1) zeigt man

$$\overline{\lim}_n P \left( \left| \sum_{j=1}^{k_n(t)} E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) (1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta^{-1} \| X_{n,j} \| \leq \eta) \right. \right. \\ \left. \left. E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') 1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta \right| > \epsilon \right) = 0$$

$$\overline{\lim}_n P \left( \left| \sum_{j=1}^{k_n(t)} E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) (1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta^{-1} \| X_{n,j} \| \leq \eta) E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') \right. \right. \\ \left. \left. 1 \| X_{n,j} \| \leq \eta E_{n,j-1} 1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta \right| > \epsilon \right) = 0$$

4) Analog zu 2) zeigt man:

$$\overline{\lim}_n P \left( \left| \sum_{j=1}^{k_n(t)} E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) 1 \| X_{n,j} \| \leq \eta E_{n,j-1} 1 \| Z_{n,j} \| > \eta E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') \right. \right. \\ \left. \left. 1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta \right| > \epsilon \right) = 0$$

$$\overline{\lim}_n P \left( \left| \sum_{j=1}^{k_n(t)} E_{n,j-1} X_{n,j}(p,q) 1 \| X_{n,j} \| \leq \eta E_{n,j-1} X_{n,j}(p'q') 1 \| X_{n,j} \| \leq \eta \right. \right. \\ \left. \left. E_{n,j-1} 1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta E_{n,j-1} 1 \| Z_{n,j} \| > \eta \right| > \epsilon \right) = 0$$

wobei man benutzt, daß  $q_n (\{ \| X \| > n \} \times [0,1]) \rightarrow v(\{ \| X \| > n \} \times [0,1])$  n.W.,  
denn man hat hier  $P ( \| Z_{n,j} \| > n \mid f_{n,j-1} )$  statt  $P ( \| X_{n,j} \| > n \mid f_{n,j-1} )$ .

Nun zu 4 iv) und Voraussetzung 5):

$$\| E_{n,j-1} Z_{n,j} 1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta \| = \| E_{n,j-1} X_{n,j} 1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta - E_{n,j} X_{n,j} 1 \| X_{n,j} \| \leq \eta \| \\ E_{n,j-1} 1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta \| \leq \\ \leq \| E_{n,j-1} X_{n,j} (1 \| Z_{n,j} \| \leq \eta^{-1} \| X_{n,j} \| \leq \eta) \| + \| E_{n,j-1} X_{n,j} 1 \| X_{n,j} \| \leq \eta \| \\ \| E_{n,j-1} 1 \| Z_{n,j} \| > \eta \|$$

Wie oben in 1) bzw. 2) zeigt man:

$$\lim_n P \left( \bigcap_{j=1}^{k(n)} \left| E_{n,j-1} X_{n,j} \left( 1_{|Z_{n,j}| \leq \eta} - 1_{|X_{n,j}| \leq \eta} \right) \right| > \varepsilon \right) = 0 \text{ bzw.}$$

$$\lim_n P \left( \bigcap_{j=1}^{k(n)} \left| E_{n,j-1} X_{n,j} \left( 1_{|X_{n,j}| \leq \eta} - 1_{|Z_{n,j}| > \eta} \right) \right| > \varepsilon \right) = 0$$

d.h. man kann in 4 iv)  $a_n \equiv 0$  und in 5)  $Z = 0$  wählen, (da  $Z_{n_1}(1) \rightarrow 0$  n.W.

also für eine Teilfolge  $(n_1) \subset (n)$  ist  $Z_{n_1}(1) \rightarrow 0$  f.s., damit

$$\lim_{n_1} (Z_{n_1}(t) - Z_{n_1}(s)) = 0 \text{ f.s. } \forall s, t.)$$

Wie man sieht, entfallen zwei Forderungen, wenn man nur an der Konvergenz der zentrierten Prozesse interessiert ist. Die nächste Folgerung zeigt nun, daß man im allgemeinen auf die Voraussetzungen 4 ii) iii) nicht verzichten kann.

### 11. Folgerung

Sind die  $\{X_{n,j}\}_{n,j}$  unabhängig,  $k_n(\cdot)$  feste (nicht mehr zufällige) Funktionen und ist

$$\lim_n \max \{ P(|X_{n,j}| > \eta) \mid j=1, \dots, k_n(1) \} = 0 \quad \forall \eta > 0,$$

$Y_{n,0}$  unabhängig von den  $X_{n,j}$  und  $Y_{n,0} \xrightarrow{D} Y_0$  für ein  $Y_0$ , dann hat man für die zentrierten Prozesse  $Z_n(\cdot)$ ,  $Z_n^Y(\cdot)$ : genau dann gibt es Prozesse  $Z$  und  $Z^Y$  stochastisch stetig mit  $(Y_0, Z_n, Z_n^Y) \xrightarrow{D} (Y_0, Z, Z^Y)$ , wenn die Voraussetzungen 4 ii) und 4 iii) erfüllt sind.

### Beweis

Daß die Voraussetzungen hinreichend sind, folgt aus Folgerung 10 mit

$$f_{n,j} = \sigma(X_{n,j}, \dots, X_{n,j}; Y_{n,0}) \quad j \geq 1, \quad f_{n,0} = \sigma(Y_{n,0}).$$

Sei also  $(Y_{n,0}, Z_n, Z_n^Y) \xrightarrow{D} (Y_0, Z, Z^Y)$  und  $Z, Z^Y$  stochastisch stetig.

Insbesondere gilt dann für  $0 \leq s < t \leq 1$ :  $Z_n(t) - Z_n(s) \xrightarrow{D} Z(t) - Z(s)$ .

Mit [1], Übung 2.4.9 f) folgt: Es gibt  $v$  und  $\phi$  mit

$$p_n(\cdot \times [0, t]) \Big|_{\|x\| > \delta} \rightarrow v(\cdot \times [0, t]) \Big|_{\|x\| > \delta} \quad \forall t \in [0, 1], \quad \delta > 0 \text{ mit}$$

$$v(\partial(\|x\| \leq \delta) \times [0, 1]) = 0$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_n \sum_{j=1}^{k_n(t)} E \left( u^T (X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \delta} - E X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \delta}) \right)^2 = \\ & = \phi(u, u, t) \quad \forall t \in (0, 1), \quad u \in \mathbb{R}^{M^2} \end{aligned}$$

Man muß zeigen: für ein  $\eta$  mit  $v(\partial(\|x\| \leq \eta) \times [0, 1]) = 0$  ist

$$\begin{aligned} & \lim_n \sum_{j=1}^{k_n(t)} E \left( u^T (X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - E X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) \right)^2 = \\ & = \phi_\eta(u, u, t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad u \in \mathbb{R}^{M^2}, \end{aligned}$$

denn durch Wahl von  $u = e_i$ ,  $u = e_i + e_j$  ( $e_i$  Einheitsvektoren) folgt 4 iii).

$$\text{Setze: } \phi_\eta(u, u, t) = \phi_\eta(u, u, t) + \int (u^T x)^2 \mathbf{1}_{\|x\| \leq \eta} v(dx \times [0, t])$$

$$\begin{aligned} (*) \quad & \sum_{j=1}^{k_n(t)} E \left( u^T (X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - E X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) \right)^2 = \\ & = \sum_{j=1}^{k_n(t)} E \left( u^T (X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \delta} - E X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \delta}) \right)^2 + \\ & \quad + \sum_{j=1}^{k_n(t)} E \left( u^T X_{n,j} \mathbf{1}_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta} \right)^2 - \\ & \quad - \sum_{j=1}^{k_n(t)} (E u^T X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} + E u^T X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \delta}) E u^T X_{n,j} \mathbf{1}_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta} \end{aligned}$$

Wie (1.12) zeigt man:

$$\max \{ \| E X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \delta} \| \mid j=1, \dots, k_n(t) \} \rightarrow 0, \text{ daraus folgt}$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{k_n(t)} (E u^T X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} + E u^T X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \delta}) E u^T X_{n,j} \mathbf{1}_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta} \right| \leq \\ & \leq \left( \max \{ \| E X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \| \mid j=1, \dots, k_n(1) \} + \max \{ \| E X_{n,j} \mathbf{1}_{\|X_{n,j}\| \leq \delta} \| \mid \right. \\ & \quad \left. j=1, \dots, k_n(1) \} \right) \cdot \int \mathbf{1}_{\|x\| > \delta} v_n(\{ \|x\| > \delta \} \times [0, 1]) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n(t)}{n} E (u^T X_{n,j})^2 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta} = \int (u^T x)^2 1_{\|x\| \leq \eta} v(dx \times [0, t])$$

denn: Für eine Teilfolge  $\delta_m \rightarrow 0$  mit  $v(\{ \|x\| \leq \delta_m\} \times [0, 1]) = 0$

gilt wegen  $p_n(\cdot \times (0, t)) \Big|_{\|x\| > \delta_m} \xrightarrow{w} v(\cdot \times [0, t]) \Big|_{\|x\| > \delta_m}$

und  $\int (u^T x)^2 1_{\|x\| \leq \eta} v(dx \times (0, 1)) < \infty$  (da  $v$  ein Levy-Maß ist) :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_n \frac{k_n(t)}{n} E (u^T X_{n,j})^2 1_{\delta_m < \|X_{n,j}\| \leq \eta} = \int (u^T x)^2 1_{\|x\| \leq \eta} v(dx \times [0, t])$$

Nun sind also  $\overline{\lim}_n \frac{k_n(t)}{n} E (u^T X_{n,j})^2 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta}$  und

$(\frac{\lim}{n} \frac{k_n(t)}{n} E (u^T X_{n,j})^2 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta})_{\delta}$  und monoton in  $\delta$ , also gilt die

Behauptung. Damit folgt aber nun mit Gleichung (\*) :

$$\Phi_{\eta}(u, u, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_n \frac{k_n(t)}{n} E (u^T (X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \delta} - E X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \delta}))^2 +$$

$$+ \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_n \frac{k_n(t)}{n} E (u^T X_{n,j})^2 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta} -$$

$$- \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_n \frac{k_n(t)}{n} (E u^T X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} + E u^T X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta})$$

$$E u^T X_{n,j} 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta} \geq \quad (*)$$

$$\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_n \frac{k_n(t)}{n} E (u^T (X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - E X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}))^2 \geq$$

$$\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_n \frac{k_n(t)}{n} E (u^T (X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - E X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}))^2 \geq \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
 & \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_n \frac{k_{n\sum}(t)}{n} E (u^T (X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - E X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta})^2 + \\
 & + \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_n \frac{k_{n\sum}(t)}{n} E (u^T X_{n,j})^2 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta} + \\
 & + \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_n \frac{k_{n\sum}(t)}{n} (E u^T (X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} + E u X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) \\
 & E u^T X_{n,j} 1_{\delta < \|X_{n,j}\| \leq \eta} = \phi_n(u, u, t)
 \end{aligned}$$

Für die charakteristische Funktion von  $Z(t) - Z(s)$  gilt, da  $Z(\cdot)$  ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen mit Levy-Maß  $\nu$  und Kovarianz  $\phi$  ist.

$$\begin{aligned}
 & E \exp \{ i u^T (Z(t) - Z(s)) \} = \\
 & = \exp \{ \int (\exp \{ i u^T X \} - 1 - i u^T 1_{\|X\| \leq \eta}) \nu(dX \times ]s, t]) - \\
 & - \frac{1}{2} (\phi(u, u, t) - \phi(u, u, s)) \}
 \end{aligned}$$

$Z$  stochastisch stetig also:  $t_n \rightarrow t \Rightarrow Z(t_n) \rightarrow Z(t)$  n.W.  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 & E \exp \{ i u^T (Z(t_n) - Z(t)) \} \rightarrow 1 \Rightarrow \text{für } u \in \mathbb{R}^{M^2}, A \subseteq \{\|x\| > \delta\}: \\
 & \phi(u, u, t_n) - \phi(u, u, t) \rightarrow 0 \text{ und } \nu(A \times ]\min\{t_n, t\}, \max\{t_n, t\}]) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

## 12. Bemerkung

Wegen Satz A. 8 ist im Fall der Unabhängigkeit Voraussetzung 5

$$\text{Äquivalent zu } \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_n \sup_{|t-s| \leq \delta} |Z_n(t) - Z_n(s)| = 0$$

Für jedes  $n$  ist  $Y_n$  Lösung von

$$(1.15) \quad Y_n(t) = Y_{n,0} + \int_{]0,t]} h_n(s, X_n(s-), Y_n(s-)) dX_n(s)$$

Wie gezeigt, ist unter bestimmten Voraussetzungen:

$$(Y_{n,0}, X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (Y_0, X, Y).$$

Wie sieht aber die Verteilung von  $Y$  aus? Es ist natürlich plausibel anzunehmen, daß  $Y$  die gleiche Verteilung hat wie die Lösung  $Z$  von

$$(1.16) \quad Z(t) = Y_0 + \int_{[0,t]} h_0(s, X(s-), Z(s-)) dX(s)$$

(falls Z existiert). Dazu der folgende

### 13. Satz

Sind die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt und gibt es eine vollständige, rechtsstetige, stochastische Basis  $(\Omega, (f_t)_{t \geq 0}, f, P)$  auf der  $X$  und  $Y_0$  definiert sind und  $X$  ein Semimartingal ist, dann gibt es eine Lösung  $Z$  in (1.16),  $(Y_{n,0}, X_n, Y_n) \stackrel{D}{\rightarrow} (Y_0, X, Y)$  und  $(Y_0, X, Y) \stackrel{D}{=} (Y_0, X, Z)$

Beweis:

Man definiert  $\tilde{H} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_0 \end{pmatrix}$

$\tilde{X}(t) := \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & X(t) & 0 \\ 0 & 0 & X(t) \end{pmatrix}$  ; für einen Prozeß

$Z(t) := \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Z}_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Z}_2(t) \end{pmatrix}$  sei  $F(\tilde{Z})(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h_0(t, Z_1(t), Z_2(t)) \end{pmatrix}$

Für die Folge  $(t_{m,j})_{m,j}$  von Zerlegungen von  $[R_+$

mit  $0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \dots = \infty$  und  $\max_j (t_{m,j+1} - t_{m,j}) \rightarrow 0$

betrachtet man die stochastische Differentialgleichung

$$\tilde{Z}^m(t) = \tilde{H} + \sum_{j \geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h_0(t_{m,j}, \tilde{Z}_1^m(t_{m,j}), \tilde{Z}_2^m(t_{m,j})) \end{pmatrix} \cdot (\tilde{X}(t_{m,j+1}) - \tilde{X}(t_{m,j})) =$$

(1.17)

$$= \tilde{H} + \int_0^t \sum_{j \geq 0} F \left( \sum_{j \geq 0} (\tilde{Z}^m(t_{m,j}))^{-1} \mathbb{1}_{[t_{m,j}, t_{m,j+1})}(\cdot) \right) \mathbb{1}_{[t_{m,j}, t_{m,j+1})}(\cdot) (s-) d\tilde{X}(s)$$

für  $a \in M^M$ ,  $z \in D_{M^M}(R_+)$  war  $H_{m,0}(a, z)$  definiert

durch (s.o.) :  $H_{0,m}(a, z)(0) := a$

$$H_{O,m}(a,Z)(t) := H_{O,m}(a,Z)(t_{m,i}) + \\ + h_{O,m}(t_{m,i}, Z(t_{m,i}), H_{O,m}(a,Z)(t_{m,i}))(Z(t) - Z(t_{m,i})), \quad t_{m,i} \leq t \leq t_{m,i+1}$$

Man sieht sofort durch Rekursion, daß

$$\tilde{Y}^m(t) := \tilde{H} + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & X(t) & 0 \\ 0 & 0 & H_{O,m}(Y_O, X)(t) \end{pmatrix} \quad \text{eine Lösung}$$

von (1.17) ist. Betrachtet man die (1.17) entsprechende "kontinuierliche" Gleichung

$$(1.18) \quad \tilde{Z}(t) = \tilde{H} + \int_{0,t} F(\tilde{Z})(s-) d\tilde{X}(s)$$

so gilt nach Théorème 1 in [4] :

(1.18) hat genau eine Lösung  $\tilde{Y}$  mit

$$(1.19) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} P \left( \sup_{t \leq T} \|\tilde{Y}(t) - \tilde{Y}^m(t)\| > \varepsilon \right) = 0 \quad \forall \varepsilon, T > 0$$

Man zeigt nun:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\|Y_n(t) - H_{n,m}(X_n)(t)\| > \varepsilon) = 0$ .

Angenommen, die Behauptung gilt nicht, dann gilt ein  $\delta > 0$  und Teilfolgen  $(m')$ ,  $(n')$  mit  $P(\|Y_{n'}(t) - H_{n',m'}(X_{n'})(t)\| > \varepsilon) > \delta \quad \forall n', m'$ .

Wie im Beweis zu Satz 9 gezeigt, gilt eine Folge  $C_r \rightarrow \infty$  mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=1}^{k(t)} 1_{\|X_{n,j}\| > C_r} \geq 1 \right) = 0 \quad \forall t \text{ und} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\|Y_{n,0}\| > C_r) = 0$$

Wähle ein  $C_r$  und ein  $n_1$ , so daß  $P(\|Y_{n,0}\| > C_r) \leq \frac{\delta}{4} \quad n \geq n_1$

$$\text{und } P \left( \sum_{j=1}^{k(t)} 1_{\|X_{n,j}\| > C_r} \geq 1 \right) \leq \frac{\delta}{4} \quad \forall n \geq n_1.$$

Nach (1.3) gibt es eine Teilfolge  $(n'') \subset (n')$ , so daß die abgeschnittenen

Zufallsvariablen  $X_{n,j} \quad 1_{\|X_{n,j}\| \leq C_r}$  auf  $(n'')$  die Voraussetzung 1 erfüllen,

also insbesondere nach Lemma 5 (da  $Y_{n,m}^{C_r} = H_{n,m}(X_n^{C_r})$ )

$$\lim_{m' \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n'' \rightarrow \infty} P ( \| Y_{n''}^{\mathcal{C}_r}(t) - H_{n'',m'}(X_{n''}^{\mathcal{C}_r})(t) \| > \varepsilon ) = 0 \quad \forall \varepsilon, t > 0$$

Es gibt also ein  $m_0$  und ein  $n_0 \geq n_1$  mit

$$P ( \| Y_{n''}^{\mathcal{C}_r}(t) - H_{n'',m'}(X_{n''}^{\mathcal{C}_r})(t) \| > \varepsilon ) \leq \frac{\delta}{4} \quad \forall m' \geq m_0, n'' \geq n_0,$$

$$\text{damit ist } P ( \| Y_{n''}(t) - H_{n'',m'}(X_{n''})(t) \| > \varepsilon ) \leq$$

$$\leq P ( \| Y_{n'',0} \| > C_r ) + P ( \sum_{j=1}^{k(t)} 1_{\| X_{n'',j} \| > C_r} \geq 1 ) +$$

$$+ P ( \| Y_{n''}^{\mathcal{C}_r}(t) - H_{n'',m'}(X_{n''}^{\mathcal{C}_r})(t) \| > \varepsilon ) \leq \frac{3}{4} \delta$$

für alle  $m' \geq m_0$ ,  $n'' \geq n_0$ ; da  $(n'') \leq (n')$  ist, ist dies ein Widerspruch

zur Annahme, also:

$$(1.20) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P ( \| Y_n(t) - H_{n,m}(X_n)(t) \| > \varepsilon ) = 0 \quad \forall \varepsilon, t > 0$$

Sei  $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}_+$ ; nach Satz 9 gilt

$$(Y_{n,0}, X_n, Y_n(t_1), \dots, Y_n(t_r)) \rightarrow (Y_0, X, Y(t_1), \dots, Y(t_r)).$$

Aus (1.19) folgt:

$$(Y_0, X, H_{0,m}(Y_0, X)(t_1), \dots, H_{0,m}(Y_0, X)(t_r)) \xrightarrow{D} (Y_0, X, \tilde{Y}_2(t_1), \dots, \tilde{Y}_2(t_r))$$

Nach Folgerung 7 und Satz 9 gilt:

$$(Y_{n,0}, X_n, H_{n,m}(Y_{n,0}, X_n)(t_1), \dots, H_{n,m}(Y_{n,0}, X_n)(t_r)) \rightarrow \\ \xrightarrow{D} (Y_0, X, H_{0,m}(Y_0, X)(t_1), \dots, H_{0,m}(Y_0, X)(t_r)).$$

Mit (1.20) ergibt sich daher nach Satz A. 1

$$(Y_0, X, \tilde{Y}_2(t_1), \dots, \tilde{Y}_2(t_r)) \stackrel{D}{=} (Y_0, X, Y(t_1), \dots, Y(t_r))$$

#### 14. Folgerung

Sind die Voraussetzungen für Satz 9 erfüllt und die  $X_{n,j}$  unabhängig in jeder Zeile, so gilt die Aussage von Satz 13.



Beweis:

Die Unabhängigkeit liefert, daß die Funktionen  $v$ ,  $b$  und  $a$  in Voraussetzung 4 deterministisch sind, mit Voraussetzung 5 folgt dann, daß  $a$  von beschränkter Variation ist; aus [11], Théorème (2.78) folgt dann, daß  $X$  ein Semimartingal ist.

15. Beispiel  $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,k_n}$  iid,  $k_n \rightarrow \infty$

a)  $E \|X_{n,1}\|^2 < \infty$ ; es seien folgende Bedingungen erfüllt:

I)  $k_n E X_{n,1} \rightarrow B \in \mathbb{M}^M$

II)  $k_n E X_{n,1}(p,q) X_{n,1}(p',q') \rightarrow C(p,p',q,q') \quad \forall p, q, p', q' = 1, \dots, M$

III)  $k_n E \|X_{n,1}\|^2 1_{\|X_{n,1}\| > \delta} \rightarrow 0 \quad \forall \delta > 0$  (die Lindeberg-Bedingung)

dann gibt es eine Brown'sche Bewegung  $X$  mit Erwartung  $t \cdot B$  und Kovarianz  $C$  und einen Prozeß  $Y$ , so daß

$$\left( \sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}, \sum_{j=1}^{k_n} (I + X_{n,j}) \right) \xrightarrow{D} (X, Y)$$

b) Es gibt  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{M}^M \setminus \{0\}$  mit  $P(X_{n,1} = A_1) = p_{n,1}, 1 = 1, \dots, m$

und  $P(X_{n,1} = 0) = 1 - \sum_{l=1}^m p_{n,l}$ ; es gelte  $k_n \cdot p_{n,1} \rightarrow \lambda_1, 1 = 1, \dots, m$

dann gibt es einen Poisson-Prozeß  $X$  mit Erwartungswertmaß

$$t \sum_{l=1}^m \lambda_l \delta_{A_l}(\cdot) \text{ und einen Prozeß } Y, \text{ so daß}$$

$$\left( \sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}, \sum_{j=1}^{k_n} (I + X_{n,j}) \right) \xrightarrow{D} (X, Y)$$

### 16. Bemerkung

- a) Während man im allgemeinen den Prozeß  $Y$  wohl nicht expliziert angeben kann, ist dies im eindimensionalen (vermutlich generell im kommutativen) Fall möglich ([11], VIII. 1) :

$$Y(t) = \exp \left\{ X(t) - \frac{1}{2} \langle X^C, X^C \rangle (t) \right\} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X(s)) e^{-\Delta X(s)}$$

(man nimmt (im Vorgriff auf das nächste Kapitel) an, daß

$Y$  Lösung von  $Y(t) = 1 + \int_{]0,t]} Y(s-) dX(s)$  ist, was ja

durchaus plausibel ist, da für jedes feste  $n$  gilt:

$Y_n(t) = 1 + \int_{]0,t]} Y_n(s-) dX_n(s)$  und  $(X_n, Y_n)$  nach Verteilung konvergieren

#### Fall a):

$X$  ist Brown'sche Bewegung mit  $E X(t) = b t$  und  $E X^2(t) = ct$ ; da  $X$  stetige Pfade hat, ist  $\Delta X(s) = 0$  und  $\langle X^C, X^C \rangle (t) = ct$ , also

$Y(t) = \exp \{ X(t) - \frac{1}{2} ct \}$ . Damit hat  $Y$  eine logarithmische Normalverteilung,  $Y(t)$  hat die Dichte

$$f_t(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{1}{2 \sqrt{ct y}} \exp \left\{ - \frac{1}{2ct} \left( \ln y + \frac{1}{2} ct - bt \right)^2 \right\} & y > 0 \end{cases}$$

#### Fall b):

Zunächst definiert man den Punktprozeß der Sprünge von  $X$ :

$$D := \{ (t, \omega) \mid |\Delta X(t, \omega)| > 0 \},$$

$$\mu(dX, dt, \omega) := \int_{(s, \omega) \in D} \delta_{(\Delta X(s, \omega), s)}(dX, dt)$$

Der Prozeß  $X$  ist ja ein reiner Sprungprozeß, also  $\langle X^C, X^C \rangle \equiv 0$

und  $X(t) = \sum_{s \leq t} \Delta X(s)$ , somit ist  $Y(t) = \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X(s))$ . Nun gilt ja

$\Delta X(s) = \sum_{i=1}^m A_i 1_{A_i}(\Delta X(s))$  und da sich die einzelnen Ereignisse aus-

schließen, ist dann  $1 + \Delta X(s) = 1 + \sum_{i=1}^m A_i 1_{A_i}(\Delta X(s)) = \prod_{i=1}^m (1 + A_i)^{1_{A_i}(\Delta X(s))}$

$$Y(t) = \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X(s)) = \prod_{i=1}^m (1 + A_i)^{\sum_{s \leq t} 1_{A_i}(\Delta X(s))} \Rightarrow$$

$$Y(t) = \prod_{i=1}^m (1 + A_i)^{\mu(\{A_i\} \times ]0, t])} . \quad \text{Ist speziell } A_1 = 1, m = 1,$$

$$\text{dann ist } X(t) = \int_0^t 1_{\{1\}} \times ds = \mu(\{1\} \times ]0, t]), \text{ also}$$

$X(t)$  ein Poissonprozeß mit Parameter  $\lambda t$  ;

$$Y(t) = 2^{X(t)} , \text{ also } P(Y(t) = 2^k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} , k = 0, 1, \dots$$

b) Ein Spezialfall von 13a) wird in [23] betrachtet (mit einer schwächeren Konvergenz)

c) Man sieht sofort, daß für  $X_1, X_2, \dots$ , id mit  $E X_1 = 0$  und  $E \|X_1\|^2 < \infty$  die Voraussetzungen von 13a) erfüllt sind.

#### Beweis:

a) Man muß zeigen, daß Voraussetzungen 4 und 5 erfüllt sind, denn die übrigen Voraussetzungen sind wegen

$$Y_{n,0} = I \quad \text{und} \quad h_n(t, X, Y) = h_0(t, X, Y) = Y \quad \text{erfüllt.}$$

Zu 4i) und 4ii) : Man zeigt  $v \equiv 0$  : Sei  $\delta > 0$ ,

$$\sum_{j=1}^k P(\|X_{n,j}\| > \delta) \leq k_n \frac{1}{\delta^2} E \|X_{n,j}\|^2 1_{\|X_{n,1}\| > \delta} \rightarrow 0$$

Zu 4iii) : Sei  $\delta > 0$ , dann gilt:

$$(*) \quad k_n \cdot E \|X_{n,1}\| 1_{\|X_{n,1}\| > \delta} \rightarrow 0, \text{ denn:}$$

$$k_n E \|X_{n,1}\| 1_{\|X_{n,1}\| > \delta} \leq \frac{k_n}{\delta} E \|X_{n,1}\|^2 1_{\|X_{n,1}\| > \delta} \rightarrow 0 ;$$

Man zeigt nun:

$$X_n \mid E X_{n,1}(p, q) 1_{\|X_{n,1}\| \leq \delta} E X_{n,1}(p'q') 1_{\|X_{n,1}\| \leq \delta} \mid \rightarrow 0$$

Wegen  $|x \cdot y| \leq 2x^2 + 2y^2$  genügt es zu zeigen:

$$k_n E^2 X_{n,1}(p,q) 1_{\|X_{n,1}\| \leq \delta} \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned} k_n \cdot E X_{n,1} + B &\Rightarrow k_n \|E X_{n,1}\| + \|B\| \Rightarrow k_n \|E X_{n,1}\|^2 \rightarrow 0 \\ k_n E^2 X_{n,1}(p,q) 1_{\|X_{n,1}\| \leq \delta} &\leq 2k_n E^2 X_{n,1}(p,q) + 2k_n E^2 X_{n,1}(p,q) 1_{\|X_{n,1}\| > \delta} \\ &\leq 2k_n \|E X_{n,1}\|^2 + 2k_n E \|X_{n,1}^2\| 1_{\|X_{n,1}\| > \delta} \rightarrow 0; \end{aligned}$$

kann man noch zeigen, daß

$$k_n E X_{n,1}(p,q) X_{n,1}(p',q') 1_{\|X_{n,1}\| \leq \delta} \rightarrow C(p,q,p',q') \text{ konvergiert}$$

so folgt 4iii) mit  $b(n,t) = b(t) = t \cdot C_1$  wegen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{[k_n t]} (E X_{n,j}(p,q) X_{n,j}(p',q') 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - E X_{n,j}(p,q) 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} \\ E X_{n,j}(p',q') 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta}) \sim \frac{[k_n t]}{k_n} k_n E X_{n,1}(p,q) X_{n,1}(p',q') 1_{\|X_{n,1}\| \leq \eta}. \end{aligned}$$

Dazu zeigt man:

$$\begin{aligned} |k_n E X_{n,1}(p,q) X_{n,1}(p',q') - k_n E X_{n,1}(p,q) X_{n,1}(p',q') 1_{\|X_{n,1}\| \leq \eta}| &= \\ = k_n |E X_{n,1}(p,q) X_{n,1}(p',q') 1_{\|X_{n,1}\| > \eta}| &\leq \\ \leq 2k_n E X_{n,1}^2(p,q) 1_{\|X_{n,1}\| > \eta} + 2k_n E X_{n,1}^2(p',q') 1_{\|X_{n,1}\| > \eta} &\leq \\ \leq 2k_n E \|X_{n,1}\|^2 1_{\|X_{n,1}\| > \eta} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

zu 4 iv):

Wie oben gezeigt, gilt  $k_n E \|X_{n,1}\| 1_{\|X_{n,1}\| > \delta} \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{[k_n t]} E X_{n,j} 1_{\|X_{n,j}\| \leq \eta} - t \cdot B \right| &= \left| [k_n t] E X_{n,1} 1_{\|X_{n,1}\| \leq \eta} - t B \right| = \\ = \left| - [k_n t] E X_{n,1} 1_{\|X_{n,1}\| > \eta} + [k_n t] E X_{n,1} - t B \right| &\leq \end{aligned}$$

$$\leq k_n E \|X_{n,1}\|^{-1} \|X_{n,1}\|_{>\eta} + \left| \frac{[k_n \cdot t]}{k_n} - t \right| k_n \|E X_{n,1}\| + t \cdot \|k_n E X_{n,1} - B\| \rightarrow 0$$

Zu Voraussetzung 5):

$$\begin{aligned} j = \frac{[k_n t]}{[k_n s]} + 1 \quad \|E X_{n,j}\|_{X_{n,j} \leq \eta} &= ([k_n t] - [k_n s]) \|E X_{n,1}\|_{X_{n,1} \leq \eta} \leq \\ &\leq \frac{([k_n t] - [k_n s])}{k_n} k_n \|E X_{n,j}\| + 2k_n E \|X_{n,1}\|_{X_{n,j} > \eta} \Rightarrow \end{aligned}$$

Voraussetzung 5 mit  $\phi(t) = t \cdot \|B\|$

b) Ebenso wie a) muß man zeigen, daß Voraussetzungen 4 und 5 erfüllt sind:

zu 4 i) : O.E sei  $\delta < \frac{1}{2} \min_e \|A_e\|$  ;

$$\max_{j=1}^k P(\|X_{n,j}\| > \delta) \rightarrow 0 \quad P(\|X_{n,1}\| > \delta) = \sum_{e=1}^m p_{n,e} \rightarrow 0$$

Zu 4 ii) Sei also A eine Teilmenge von  $\{\|X\| > \delta\}$  für ein  $\delta > 0$  ;

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{[k_n t]} P(X_{n,j} \in A) &= (k_n t) P(X_{n,1} \in A) = (k_n t) \sum_{e=1}^m p_{n,e} \delta_{A_e}(A) = \\ &= \frac{[k_n t]}{k_n} \sum_{e=1}^m k_n p_{n,e} \delta_{A_e}(A) + t \sum_{e=1}^m \lambda_e \delta_{A_e}(A) \end{aligned}$$

Zu 4 iii), 4 iv) und Voraussetzung 5: Wähle  $\eta < \frac{1}{2} \min_e \|A_e\|$ , dann ist

$$\|X_{n,j}\|_{X_{n,j} \leq \eta} = 0 \quad \forall j \text{ also gelten diese Voraussetzungen}$$

mit  $b(\eta, \cdot) \equiv a(\eta, \cdot) \equiv 0$  und  $\phi(\cdot) \equiv 0$

### 17. Bemerkung

Eine andere Betrachtungsweise findet man in [5] und darauf folgenden

Arbeiten, wo man die Verteilung von  $\frac{1}{\sqrt{n}} (\log (\prod_{i=1}^m X_i(p,q) - n \cdot a))$  behandelt.

Man muß dort Bedingungen an die Matrixelemente (z.B. Positivität) stellen.

Ein direkter Zusammenhang mit dem hier betrachteten  $\prod_{i=1}^m (I + \frac{1}{\sqrt{n}} X_i)$  ist nicht zu sehen.

Eine formale Ähnlichkeit findet sich, wenn man Ergebnisse aus Kap. III, § 2 und Kapitel IV benutzt. Liegen nämlich  $X_1, \dots, X_n$  in einer Gruppe von Matrizen, auf der man die n-te Wurzel definieren kann, so lassen sich mit den dortigen Ergebnissen Aussagen machen über die Konvergenz von

$$\sqrt[n]{X_1} \dots \sqrt[n]{X_n} \quad (\text{siehe auch [6] } ).$$

## KAPITEL 2

### SCHWACHE STABILITÄT STOCHASTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IM ALLGEMEINEN FALL

Im letzten Kapitel war gezeigt worden, daß unter gewissen Voraussetzungen der Partialsummenprozeß  $X_n$ , der Anfangswert  $Y_{n,0}$  und die Lösung der stochastischen Differentialgleichung  $dY_n(t) = h_n(t-, Y_n(t-), Y_n(t-)) dX_n(t)$  gemeinsam in Verteilung konvergieren.

In diesem Kapitel soll nun gezeigt werden, daß man unter entsprechenden Voraussetzungen das gleiche Ergebnis erhält, wenn die  $X_n$  Semimartingale sind.

Die Idee ist, daß man bei festem  $n$  durch die Wahl von Stoppzeiten  $T_{n,j}$  den "Abstand" zwischen  $X_n$  und dem Partialsummenprozeß  $\Delta X_n$  bzw.  $Y_n$  und  $\Delta Y_n$  beliebig klein machen kann. Man wählt also für diesen "Abstand" eine Nullfolge (in  $n$ ) und zeigt dann, daß  $\Delta X_n$  die Voraussetzungen aus dem vorhergehenden Kapitel erfüllt.

Die Notation ist im Wesentlichen die gleiche wie in (22), wo die Verteilungskonvergenz von Semimartingale behandelt wird. Gegeben sei die folgende Situation:

Ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , auf dem alle vorkommenden Variablen definiert sind.

$X_n$  und  $X$  sind cadlag-Prozesse mit Werten in  $\mathbb{M}^M$  und 0 in 0.  $X_n$  bzw.  $X$  sind Semimartingale, adaptiert an die rechtsstetige Filtrierung  $(\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}$  bzw.  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , wobei  $\mathcal{F}_0^n$  und  $\mathcal{F}_0$  vollständig sind. Für die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{G}$  sei  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_0 \cap \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_0^n$ . Weiterhin sei  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , die kleinste Filtrierung mit

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}_0$ , an die  $X$  adaptiert ist. Für die  $\mathbb{Y}_{n,0}$  sei  $\sigma(\mathbb{Y}_{n,0}) \subseteq \mathbb{F}_0^n$  für alle  $n$ .  $D_1$  dicht in  $[0,1]$  mit  $1 \in D_1$ .

Für den Prozeß  $X$  soll außerdem gelten:

$X$  ist ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen gegeben  $\mathbb{Q}$  und  $X$  quasi-stetig von links, d. h.:

für  $t_1 < \dots < t_q < s$  sind  $X(s) - X(t_q)$  und  $(X(t_1), \dots, X(t_q))$  bedingt unabhängig gegeben  $\mathbb{Q}$ , quasi-stetig von links bedeutet für einen cadlag-Prozeß  $X$  (siehe [11], (1.48), daß  $\Delta X(T) = 0$  f.s. für jede vorhersagbare Stoppzeit  $T$  (also insbesondere ist  $X$  stochastisch stetig).

### 1. Bemerkung

- Die lokalen Charakteristiken  $(B, C, \nu)$  (s. u.) sind  $\mathbb{Q}$ -meßbar und man kann  $\nu$  so wählen, daß  $\nu(\{s\} \times \mathbb{M}^M) = 0 \ \forall s$  (siehe [22], § 2 c)
- Im Gegensatz zu Kap. I muß (?) hier die Existenz und das Aussehen des Grenzprozesses  $X$  schon vorausgesetzt werden.

Die lokalen Charakteristiken  $(B, C, \nu)$  eines Semimartingales  $X$  (siehe [11], [21], [22]):

Setze  $D := \{(t, \omega) \mid \|X(t, \omega)\| > 0\}$ ,  $\mathbb{M}_0 := \mathbb{M}^M \setminus \{0\}$ ; da  $X$  ein cadlag-Prozeß ist, kann man den Punktprozeß der Sprünge von  $X$  definieren auf

$(\mathbb{M}_0 \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{M}_0} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$  durch

$$(2.1) \ \mu(dX, ds, \omega) := \sum_{(t, \omega) \in D} \delta_{(\Delta X(t, \omega), t)}(dX, ds)$$

Dann ist das zufällige Maß  $\nu$  die sogenannte "dual predictable projection" von  $\mu$ , es hat z. B. die Eigenschaft, daß für predictable  $W$  der Prozeß

(seine Existenz sei vorausgesetzt)  $\int_{\mathbb{M}_0 \times [0, t]} W(X, s, \omega) (\mu - \nu)(dX, ds, \omega)$  ein

lokales Martingal ist. Im Folgenden sei o.B.d.A. vorausgesetzt, daß

$P(\nu(\partial\{\|X\| \leq 1\} \times [0, t]) = 0 \ \forall t) = 1$  (siehe Bemerkung 3).



## 2. Beispiel ([22], 2e)

Sei  $(X_k, f_k)_{k=0,1,\dots}$  eine Folge von  $M^M$ -wertigen Zufallsvariablen und  $\sigma$ -Algebren mit  $\sigma(X_k) \subseteq \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1} \quad \forall k$ ;

$\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow (\mathbb{N}_0, \text{cadlag, wachsend mit } \sigma(t) \text{ Stoppzeit bzgl. } (f_k)_k \text{ für alle } t.$

Man betrachtet  $X(t) := \sum_{k=1}^{\sigma(t)} X_k$ .

Setze  $F_t := \mathcal{F}_{\sigma(t)}$ ,  $T_k := \inf \{t \mid \sigma(t) \geq k\}$ , dann sind die Stoppzeiten

$T_k$   $\mathcal{F}_t$ -predictable und es ist  $F_{T_k-} \cap \{T_{k-1} < \infty\} = F_{k-1} \cap \{T_{k-1} < \infty\}$ :

$$F_{T_k} = \mathcal{F}_{\sigma(T_k)} \subseteq \mathcal{F}_k; \{T_k > t\} = \{\sigma(t) \leq k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}$$

also ist  $T_k$   $\mathcal{F}_{k-1}$ -meßbar; wähle Folgen  $(T_{k,m})_m$  mit  $T_{k,m}$   $\mathcal{F}_{k-1}$ -meßbar und

$$T_{k,m} \uparrow T_k, T_{k,m} < T_k \quad \forall m;$$

$S_{k,m} := T_{k,m} \vee T_{k-1} \wedge m$  sind  $(F_t)_t$  Stoppzeiten mit  $S_{k,m} \uparrow T$  und

$S_{k,m} < T_k \quad \forall m$ . Nach [21], Theorem 6.6 ist  $T_k$  predictable und  $F_{T_k-} = \bigvee_m F_{S_{k,m}}$ .

$$\text{Es ist } \Delta X(T_k) = X_{n,k} \text{ und } X(t) = \sum_{k \geq 1} 1_{[T_k, \infty[} X_k$$

$$\mu(dx, ds) = \sum_{k \geq 1} \delta_{(X_k, T_k)}(dx, ds).$$

Da  $X^C \equiv 0$  ist, ist auch  $\tilde{C} \equiv 0$  ( $X^C$ ,  $\tilde{C}$  und  $\tilde{B}$  s.u.)

Für beschränkte, stetige Funktionen  $g$  ist wegen

$$1_{[T_k, \infty[}(t) E(g(X_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 1_{(T_k, \infty[}(t) E(g(X_k) \mid F_{T_k-}) \text{ dann}$$

$$\sum_{k \geq 1} 1_{[T_k, \infty[}(t) (g(X_k) - E(g(X_k) \mid \mathcal{F}_{k-1})) \text{ ein lokales Martingal.}$$

Damit ergibt sich die dual predictable Projection  $\nu$  von  $\mu$ :

$$\nu(dx, ds) = \sum_{k \geq 1} \delta_{T_k}(ds) P(X_k \in dx \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

$$\text{und } \tilde{B}(t) = \sum_{k \geq 1} 1_{[T_k, \infty[}(t) E(f(X_k) \mid \mathcal{F}_{k-1});$$

Es ist also

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{c} \equiv 0 \\ \tilde{B}(t) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{[T_k, \infty[} (t) E(f(X_k) \mid f_{k-1}) \\ \nu(dX, ds) = \sum_{k \geq 1} \delta_{T_k}(ds) P(X_k \in dX \mid f_{k-1}) \end{array} \right.$$

Ist  $X$  ein Semimartingal, dann gilt

$$\infty > \sum_{s \leq t} \left| \Delta X(s) \right|^2 = \int \left| X \right|^2 1_{M_0 X[0, t]} \mu(dX, ds).$$

Damit ist aber  $X(t) - \int X 1_{|X| > 1} \mu(dX \times [0, t])$  ein Semimartingal mit durch 1 beschränkten Zuwächsen, es besitzt daher eine eindeutige Darstellung als Summe  $M + B$  mit einem lokalen Martingal  $M$  und einem predictable Prozeß  $B$  von beschränkter Variation. Zusätzlich hat  $M$  noch die Darstellung  $M = X^c + X^d$  wobei  $X^c$  ein stetiges lokales Martingal ist, sozusagen der "stetige Anteil" von  $M$  und für  $X^d$  ergibt sich die Darstellung als stochastisches Integral.

$$X^d(t) = \int X 1_{|X| \leq 1} (\mu - \nu)(dX \times [0, t])$$

Insgesamt ergibt sich damit ([1], (3.78)):

$$(2.3) \quad X(t) = X^c(t) + \int X 1_{|X| \leq 1} (\mu - \nu)(dX \times [0, t]) + \\ + \int X 1_{|X| > 1} \mu(dX \times [0, t]) + B(t)$$

Zu jedem  $p, q, p', q' \in \{1, \dots, M\}$  gibt es einen eindeutig bestimmten

predictable Prozeß  $\langle X^c(p, q), X^c(p', q') \rangle$

so, daß  $X^c(p, q) X^c(p', q') - \langle X^c(p, q), X^c(p', q') \rangle$  ein lokales Martingal ist (die quadratische Integrierbarkeit (lokal) von  $X^c$  ergibt sich automatisch, da ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden sogar lokal beschränkt ist).

Man wählt nun den Prozeß

$$C(p, q, p', q')(t) = \langle X^C(p, q), X^C(p', q') \rangle(t).$$

Wenn man die Darstellung in (2.2) etwas verändert, erhält man die modifizierten lokalen Charakteristiken  $(\tilde{B}, C, \nu)$ : Sei  $f: \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  eine stetige Funktion mit  $f(X) = X$  für  $\|X\| \leq \frac{1}{2}$ ,  $f(X) = 0$  für  $\|X\| \geq 1$  und

ansonsten  $\|f(X)\| \leq 1$ , damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (2.4) \quad X(t) = & X^C(t) + \int X \, 1_{\|X\| \leq \frac{1}{2}} (\mu - \nu) (dX \times [0, t]) + \\ & + \int (X - f(X)) \, \mu (dX \times [0, t]) + \int f(X) \, 1_{\|X\| > \frac{1}{2}} (\mu - \nu) (dX \times [0, t]) + \\ & + B(t) - \int (X - f(X)) \, 1_{\|X\| \leq 1} \, \nu (dX \times [0, t]) \end{aligned}$$

und setzt

$$(2.5) \quad \tilde{B}(t) = B(t) - \int (X - f(X)) \, 1_{\|X\| \leq 1} \, \nu (dX \times [0, t])$$

Man definiert nun die  $M^2 \times M^2$ -Matrix  $\tilde{C}$  durch:

$$i = (M-1)q + p, j = (M-1)q' + p', \text{ und}$$

$$(2.6) \quad \tilde{C}(i, j) = C(p, q, p', q').$$

( $\tilde{C}$  entspricht  $C$ , wenn man Matrizen  $X$  also Vektoren in  $\mathbb{R}^{M^2}$  geschrieben hätte). Weiterhin beachtet man, daß, falls

$$\Delta B(t) = \int X \, 1_{\|X\| \leq 1} \, \nu (dX \times \{t\}) \text{ ist,}$$

$$\Delta \tilde{B}(t) = \int f(X) \, \nu (dX \times \{t\}) \text{ ist.}$$

Damit ergibt sich nach [11], Proposition (3.47):

(2.7)

- (i)  $\tilde{B}$  und  $B$  sind predictable Prozesse, 0 in 0,  
pfadweise: rechtsstetig und von beschränkter Variation auf Kompakta.
- (ii)  $\tilde{C}$  und  $C$  sind predictable Prozesse, 0 in 0,  
pfadweise: stetig und für  $s \leq t$  ist  $\tilde{C}(t, \omega) - \tilde{C}(s, \omega)$

eine symmetrische, nichtnegative Matrix.

(iii)  $\nu$  ist die dual predictable projection von  $\mu$  in (2.1).

pfadweise:  $\nu(\{0\} \times \mathbb{R}_+, \omega) = 0$ , für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  gilt:

$$\nu(|M^M \times \{t\}, \omega) \leq 1, \int (1 \wedge \|X\|^2) \nu(dX \times [0, t], \omega) < \infty$$

$$\sum_{s \leq t} \left| \int X \cdot 1_{\|X\| \leq 1} \nu(dX \times \{s\}, \omega) \right| < \infty$$

(iv) für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  gilt:  $\Delta B(t, \omega) = \int X \cdot 1_{\|X\| \leq 1} \nu(dX \times \{t\}, \omega)$

(und daher)  $\Delta \tilde{B}(t, \omega) = \int f(X) \nu(dX \times \{t\}, \omega); \forall \omega$ .

### 3. Bemerkung

a) Die Eigenschaften in (2.7) ergeben sich nicht automatisch, sondern man kann Versionen mit diesen Eigenschaften wählen.

b)  $(\tilde{B}, \tilde{C}, \nu)$  sind zwar auf eindeutige Weise definiert, ergeben sich aber im allgemeinen nicht eindeutig aus dem Prozeß  $X$ :

Während  $\tilde{C}$  und  $\nu$  eindeutig sind, da es  $X^C$  und  $\mu$  sind, hängt  $B$  bzw.

$\tilde{B}$  davon ab, wie ich in  $X(t) = \int X \cdot 1_{\|X\| > b} \mu(dX \times [0, t])$  das  $b$  wähle. Man kann aber  $b$  so wählen, daß

$P(\nu(\delta\{\|X\| \leq b\} \times [0, t]) = 0 \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$  ist, also o.B.d.A.  $b = 1$ .

c) Falls  $X$  eine eindeutige Zerlegung  $X = M + B$  besitzt, ist natürlich auch  $B$  eindeutig. Um  $\tilde{B}$  zu definieren, wählt man sich ein  $b$  wie in b) und ein dazugehöriges  $f$ .

Im Fall der eindeutigen Zerlegung läßt sich auch  $X$  durch die lokalen Charakteristiken mit Hilfe der Ito-Formel darstellen (siehe [21], Theorem 32.1).

Die nächsten Betrachtungen erfolgen bei festem  $n$ , d. h. man kann den Index  $n$  weglassen. Man zeigt nämlich, daß man die Prozesse  $X(\cdot)$  und

$Y(\cdot) = Y_0 + \int_{[0, \cdot]} h(s-, X(s-), Y(s-)) dX(s)$  durch  $\Delta_X(\cdot)$  und  $\Delta_Y(\cdot)$ , die von

der Form der in Kapitel 1 behandelten Prozesse sind, approximieren kann.

Wie zu Beginn des Kapitels sei

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit einer vollständigen, rechtsstetigen Filtrierung,  $Y_0$   $\mathcal{F}_0$ -meßbar,  $X(\cdot)$  ein adaptiertes cadlag Semimartingal, 0 in 0, die

(2.8) Funktion  $h: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{M}^M \times \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  erfülle die Lipschitz-Bedingung:

$$\|h(t, x, y) - h(t', x', y')\| \leq L (|t - t'| + \|x - x'\| + \|y - y'\|)$$

Definiere  $\tilde{X}(t) := \begin{pmatrix} X(t) & 0 \\ 0 & X(t) \end{pmatrix}$ , dann ist  $\tilde{X}$  ein  $\mathbb{M}^{2M}$ -wertiges,

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  adaptiertes Semimartingal.

$\tilde{Y}_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^{2M}$  ist  $\mathcal{F}_0$ -meßbar.

Sei  $\tilde{D} := \{f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}^{2M} \mid f \text{ cadlag}\}$ , dann definiere

$\tilde{h}: \tilde{D} \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}^{2M}$  durch  $\tilde{h}(f, \omega, t) := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & h(t-, f_1(t-), f_2(t-)) \end{pmatrix}$

wenn man für  $f(t) \in \mathbb{M}^{2M}$  schreibt  $\begin{pmatrix} f_1(t) & f_4(t) \\ f_3(t) & f_2(t) \end{pmatrix}$  mit  $f_i(t) \in \mathbb{M}^M$ ,

dann ist  $\tilde{h}$  predictable bzgl. der kanonischen Basis. Man hat folgende

Ungleichungen für  $\tilde{h}$ :

$$(2.9) \quad \|\tilde{h}(f, \omega, t) - \tilde{h}(f', \omega, t)\| \leq 2L \sup_{0 \leq s < t} \|f(s) - f'(s)\| \text{ und, indem man}$$

$$\tilde{h}(0, \omega, 0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & h(0, 0, 0) \end{pmatrix} \text{ einsetzt:}$$

$$(2.10) \quad \|\tilde{h}(f, \omega, t)\|^2 \leq d_T (1 + \sup_{0 \leq s < t} \|f(s)\|^2)$$

$$\text{mit } d_T = 8(L^2 + M^2 + \|h(0, 0, 0)\|^2 + T^2)$$

#### 4. Lemma

Ist (2.8) erfüllt, dann gibt es eine eindeutige, starke Lösung von

$$(2.11) \quad \tilde{Y}(t) = Y_0 + \int_{]0,t]} \tilde{h}(Y,s) d\tilde{X}(s) \text{ auf } R_+$$

#### Beweis

Wegen (2.8) und 2.10) gibt es nach [26], Theorem 7.2 auf jedem  $[0,t]$

eine eindeutige, starke Lösung  $\tilde{Y}_T$  von (2.11)  $\tilde{Y}(t) := \tilde{Y}_T(t)$  für  $t \leq T$  ist dann die geforderte Lösung.

Wenn man  $\tilde{h}$  durch stückweise konstante Funktionen approximiert, so läßt sich zeigen, daß die Lösungen der (2.11) entsprechenden stochastischen

Differentialgleichungen dann  $\tilde{Y}$  approximieren.

Dazu setzt man  $T_m := \inf \{t \mid |\tilde{Y}(t)| \geq m\}$ , dann gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(T_m < t) = 0 \quad \forall t > 0 \text{ und } \tilde{Y}_m := \tilde{Y} 1_{[0, T_m[} \text{ ist eine starke}$$

Lösung von (2.11) auf  $[0, T_m[$  mit  $|\tilde{Y}_m|^2 \leq m^2$ .

Sei  $(\delta_n)_n$  eine Nullfolge und  $(S_{n,j})_{n,j}$  eine Folge von Stoppzeiten so, daß für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt.  $S_{n,j} \uparrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$ . Dann definiere

$$T_{n,0} := 0$$

$$T_{n,j+1} := (T_{n,j} + \delta_n) \wedge \min \{S_{n,e} \mid S_{n,e} > T_{n,j}\} \wedge$$

$$\wedge \inf \{t > T_{n,j} \mid |\tilde{X}(t) - \tilde{X}(T_{n,j})| > \delta_n \text{ oder } |\tilde{Y}(t) - \tilde{Y}(T_{n,j})| > \delta_n\}$$

Da  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  cadlag sind, folgt für jedes  $n$   $T_{n,j} \uparrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$ .

Zu  $(T_{n,j})_j$  definiert man nun (die  $f_i$  wie in Def. von  $\tilde{h}$ )

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n(f, \omega, t) &:= \sum_{j \geq 0} 1_{[T_{n,j}(\omega), T_{n,j+1}(\omega)[} (t-) \cdot \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} h(T_{n,j}(\omega), f_1(T_{n,j}(\omega)), f_2(T_{n,j}(\omega))) \end{aligned}$$

dann ist wegen  $1_{[s,t[}(\tau) = 1_{[s,t]}(\tau)$ :

$$\tilde{h}_n(f, \omega, t) = \sum_{j \geq 0} 1_{[T_{n,j}(\omega), T_{n,j+1}(\omega)]}(t) \begin{pmatrix} I \\ 0 \quad h(T_{n,j}(\omega), f_1(T_{n,j}(\omega)), f_2(T_{n,j}(\omega))) \end{pmatrix}.$$

Damit sind die  $h_n$  predictable bzgl. der kanonischen Basis. Außerdem folgt sofort aus (2.9):

$$(2.12) \quad \|\tilde{h}_n(f, \omega, t) - \tilde{h}_n(f', \omega, t)\| \leq 2L \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s) - f'(s)\|$$

### 5. Lemma

Ist (2.8) erfüllt und  $(S_{n,j})_{n,j}$  wie oben gegeben, dann gibt es für jedes  $n$  genau eine starke Lösung von

$$(2.13) \quad \tilde{Y}_n(t) = \tilde{Y}_0 + \int_{[0,t]} \tilde{h}_n(\tilde{Y}_n, s) d\tilde{X}(s) \text{ auf } [R_+ \text{ und es gilt für alle}$$

$t \in [R_+ :$

$$\lim_n P(\sup_{s \leq t} \|\tilde{Y}_n(s) - \tilde{Y}(s)\| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

### Beweis

$$\sup_{t \leq T_m} \|\tilde{h}(\tilde{Y}, t) - \tilde{h}_n(\tilde{Y}, t)\| \leq$$

$$\leq \sup_{t \leq T_m} \sum_{j \geq 0} 1_{[T_{n,j}, T_{n,j+1}]}(t) \|\tilde{h}(\tilde{Y}, t) - \tilde{h}_n(\tilde{Y}, t)\| \leq L \cdot 3 \delta_n$$

Mit Lemma 4 und [26], 7.5, Corollar 2 folgt daraus: (2.13) hat eine

starke Lösung  $Y_{n,m}$  auf  $[0, T_m[$  und  $\lim_n P(\sup_{t \leq T_m} \|\tilde{Y}_m - \tilde{Y}_{n,m}\| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Da jedes  $\tilde{Y}_{n,m}$  eindeutig ist, ergibt sich durch die Festsetzung

$$\tilde{Y}_n 1_{[0, T_m[} = \tilde{Y}_{n,m} 1_{[0, T_m[} \text{ eine starke Lösung } \tilde{Y}_n \text{ auf } R_+$$

Ist  $t \leq T_m$ , dann ist  $\sup_{s \leq t} \|\tilde{Y}_n(s) - \tilde{Y}(s)\| \leq$

$$\leq \sup_{s < T_m} \|\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s)\|.$$

Sei  $t \in \mathbb{R}_+$  fest,  $\epsilon, \eta > 0$  beliebig; wähle ein  $m$  mit

$$P(\sup_{s < t} \|\tilde{Y}(s)\| \geq m) \leq \eta; \text{ es gilt}$$

$$\lim_n P(\sup_{s < t} \|\tilde{Y}_n(s) - \tilde{Y}(s)\| > \epsilon) \leq$$

$$\leq \lim_n P(T_m < t) + \lim_n P(\sup_{s < T_m} \|\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s)\| > \epsilon)$$

$$\leq P(\sup_{s < t} \|\tilde{Y}(s)\| \geq m) \leq \eta.$$

Betrachtet man den Prozeß  $\tilde{Y}_n$  zu den Zeitpunkten  $T_{n,j}$ , so erhält man die

folgende Rekursion (wobei wie oben  $f := \begin{pmatrix} f_1 & f_4 \\ f_3 & f_2 \end{pmatrix}$  ist):

$$\tilde{Y}_n(0) = \tilde{Y}_0;$$

$$\tilde{Y}_n(T_{n,j+1}) = \tilde{Y}_n(T_{n,j}) + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & h(T_{n,j}, \tilde{Y}_{n,1}(T_{n,j}), \tilde{Y}_{n,2}(T_{n,j})) \end{pmatrix}.$$

(2.14)

$$\begin{aligned} & \cdot (\tilde{X}(T_{n,j+1}) - \tilde{X}(T_{n,j})) = \\ & = \tilde{Y}_n(T_{n,j}) + \begin{pmatrix} X(T_{n,j+1}) - X(T_{n,j}) & 0 \\ 0 & h(T_{n,j}, X(T_{n,j}), \tilde{Y}_{n,2}(T_{n,j})) \end{pmatrix} \\ & \cdot (X(T_{n,j+1}) - X(T_{n,j})) \end{aligned}$$

Dazu definiert man nun:

$$X_{n,0} := 0, \quad X_{n,j} := X(T_{n,j}) - X(T_{n,j-1}), \quad j \geq 1,$$

$$\Delta X_n(t) := \sum_{i=1}^j X_{n,i}, \quad T_{n,j} \leq t < T_{n,j+1}, \quad j \geq 0$$

(2.15)

Dann ist  $\Delta X_n$  ein  $(f_t)_{t \geq 0}$  adaptiertes cadlag Semimartingal.

$$Y_{n,0} := 0, \quad Y_{n,j+1} := Y_{n,j} + h(T_{n,j}, \Delta X_n(T_{n,j}), Y_{n,j}) X_{n,j+1}.$$

$$\Delta Y_n(t) := Y_{n,j}, \quad T_{n,j} \leq t < T_{n,j+1}, \quad j \geq 0$$



$$\text{Damit ist } \Delta_{Y_n}(T_{n,j+1}) = \Delta_{Y_n}(T_{n,j}) + h(T_{n,j}, \Delta_{X_n}(T_{n,j}), \Delta_{Y_n}(T_{n,j})) \\ (X(T_{n,j+1}) - X(T_{n,j}))$$

Um diese Prozesse mit  $\tilde{Y}$  vergleichbar zu machen, definiert man

$$\hat{Y}_n(t) := \begin{pmatrix} \Delta_{X_n}(t) & 0 \\ 0 & \Delta_{Y_n}(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{X}_n(t) := \begin{pmatrix} \Delta_{X_n}(t) & 0 \\ 0 & \Delta_{X_n}(t) \end{pmatrix}$$

Man findet sofort durch Einsetzen, daß  $\hat{Y}_n(T_{n,j})$  die Rekursion (2.14) erfüllt, d. h. es gilt

$$(2.16) \quad \hat{Y}_n(T_{n,j}) = \tilde{Y}_n(T_{n,j}) \quad \forall n, j$$

#### 6. Lemma

Ist (2.8) erfüllt und  $(S_{n,j})_{n,j}$  wie oben gegeben, dann ist  $\hat{Y}_n$  die eindeutige, starke Lösung von

$$(2.17) \quad Y_n(t) = \tilde{Y}_0 + \int_{[0,t]} \tilde{h}(Y_n, s) d\tilde{X}_n(s) \text{ auf } R_+$$

und es gilt für jedes  $t \in R_+, \epsilon > 0$

$$\lim_n P(\sup_{s < t} \|\hat{Y}_n(s) - \tilde{Y}(s)\| > \epsilon) = 0$$

#### Beweis

Für die Lösung  $Y_n$  von (2.17) gilt:

$Y_n$  konstant auf  $[T_{n,j}, T_{n,j+1}[$  und  $Y_n(T_{n,j})$  erfüllt die Rekursion (2.14),

also  $Y_n = \tilde{Y}_n$ . Damit ist  $\hat{Y}_{n,m} := \tilde{Y}_n|_{[0, T_m]}$  Lösung von (2.17) auf

$[0, T_m]$ . Sei  $t \in [R_+, \epsilon > 0$  fest gegeben.

Sei  $T_{n,j} < s < T_{n,j+1} \wedge T_m \wedge t$ :

$$\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_{n,m}(T_{n,j}) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & h(T_{n,j}, \tilde{Y}_{n,m,1}(T_{n,j}), \tilde{Y}_{n,m,2}(T_{n,j})) \end{pmatrix} (\tilde{X}(s) - \tilde{X}(T_{n,j}))$$

$$\|h(s, f_1, f_2)\| \leq \|h(0, 0, 0)\| + 2Ls + 2L\|f\| \text{ für } f = \begin{pmatrix} f_1 & f_4 \\ f_3 & f_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^{2M}$$

$$\Rightarrow \|h(T_{n,j}, \tilde{Y}_{n,m,1}(T_{n,j}), \tilde{Y}_{n,m,2}(T_{n,j}))\| \leq$$

$$\in \|h(0,0,0)\| + 2 L T_{n,j} + 2 L \sup_{\tau < s} \|\tilde{Y}_{n,m}(\tau)\|$$

Nach Wahl der  $(T_{n,j})_{n,j}$  gilt außerdem

$$\|\tilde{X}(s) - \tilde{X}(T_{n,j})\| \leq \delta_n, \text{ also:}$$

$$\|\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_{n,m}(T_{n,j})\| \leq (\|h(0,0,0)\| + 2 L s + 2 L \sup_{\tau < s} \|\tilde{Y}_{n,m}(\tau)\|) \delta_n$$

$$(2.18) \quad \leq (\|h(0,0,0)\| + 2 L t + 2 L \sup_{s < T_m \wedge t} \|\tilde{Y}_{n,m}(s)\|) \delta_n$$

Für  $s < T_m$  ist  $\|\tilde{Y}_m(s)\| \leq m$ , also gilt:

$$\{\sup_{s < T_m \wedge t} \|\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\} \subseteq \{\sup_{s < T_m \wedge t} \|\tilde{Y}_{n,m}(s)\| \leq m + \frac{\epsilon}{2}\}$$

Mit (2.18) folgt daraus:

$$\emptyset = \{\sup_{s < T_m \wedge t} \|\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\}$$

$$\cap \bigcup_{j \geq 0} \{T_{n,j} \wedge T_m \wedge t < s < T_{n,j+1} \wedge T_m \wedge t, \sup_{T_{n,j} < s < T_{n,j+1}} \|\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_{n,m}(T_{n,j})\| > \frac{\epsilon}{2}\} \supseteq$$

(2.16)

$$\supseteq \{\sup_{s < T_m \wedge t} \|\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\}$$

$$\cap \bigcup_{j \geq 0} \{T_{n,j} \wedge T_m \wedge t < s < T_{n,j+1} \wedge T_m \wedge t, \sup_{T_{n,j} < s < T_{n,j+1}} \|\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_{n,m}(T_{n,j})\| > \frac{\epsilon}{2}\} =$$

$$\supseteq \{\sup_{s < T_m \wedge t} \|\tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\} \cap$$

$$\bigcap_{j \geq 0} \{ T_{n,j} \wedge T_m \wedge t < s < T_{n,j+1} \wedge T_m \wedge t, \sup_{T_{n,j} \wedge t < s < T_{n,j+1}} \| Y_{n,m}(s) - \tilde{Y}_{n,m}(s) \| > \frac{\epsilon}{2} \}$$

$$\sup_{s < T_m \wedge t} \| \tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s) \| \leq \frac{\epsilon}{2} \sup_{s < T_m \wedge t} \| \tilde{Y}_{n,m}(s) - Y_m(s) \| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Für } n \geq n_0 \text{ ist damit } P(\sup_{s < T_m \wedge t} \| \tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s) \| > \epsilon) \leq$$

$$\leq P(\sup_{s < T_m \wedge t} \| \tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s) \| > \frac{\epsilon}{2}).$$

$$\text{Für } \eta > 0 \text{ wähle } m \text{ mit } P(T_m < t) \leq P(\sup_{s < t} \| \tilde{Y}(s) \| \geq m) \leq \eta$$

Nun wähle  $n_0 = n_0(\eta, m)$  wie oben, dann ist für  $n \geq n_0$ :

$$P(\sup_{s < t} \| \hat{Y}_n(s) - \tilde{Y}(s) \| > \epsilon) \leq P(T_m < t) + P(\sup_{s < t \wedge T_m} \| \hat{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s) \| > \frac{\epsilon}{2}) \leq$$

$$\leq \eta + P(\sup_{s < T_m \wedge t} \| \tilde{Y}_{n,m}(s) - \tilde{Y}_m(s) \| > \frac{\epsilon}{2})$$

$$\leq \eta + P(\sup_{s < t} \| \tilde{Y}_n(s) - \tilde{Y}(s) \| > \frac{\epsilon}{2}). \text{ Mit Lemma 5 folgt daraus:}$$

$$\lim_n P(\sup_{s < t} \| \hat{Y}_n(s) - \tilde{Y}(s) \| > \epsilon) \leq \eta$$

Das nächste Lemma benötigt man zur Approximation der lokalen Charakteristiken.

### 7. Lemma

Sei  $(S_{n,j})$  ein Schema von Stoppzeiten mit  $S_{n,j} \nearrow \infty \forall n$ ;  $(\delta_n)_n$  eine

monoton fallende Nullfolge;  $Z$  ein  $\mathbb{R}^m$ -wertiges Semimartingal; man definiert

$$T_{n,0} := 0, T_{n,j+1} := (T_{n,j} \wedge \frac{1}{n}) \wedge \min \{ S_{n,l} \mid S_{n,l} > T_{n,j} \} \wedge$$

$$\wedge \inf \{ t > T_{n,j} \mid \| Z(t) - Z(T_{n,j}) \| > \delta_n \}$$

Dann gilt für alle  $\varepsilon, t \in R_+, i, k \in \{1, \dots, m\}$ :

(2.19)

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} (Z_i(T_{n,j+1} \wedge t) - Z_i(T_{n,j} \wedge t)) (Z_k(T_{n,j+1} \wedge t) - Z_k(T_{n,j} \wedge t)) \frac{1}{\Delta Z(T_{n,j+1} \wedge t) - Z(T_{n,j} \wedge t)} \\ - Z(T_{n,j} \wedge t) \parallel > \varepsilon + \delta_n \\ + \sum_{s \leq t} \Delta Z_i(s) \Delta Z_k(s) \frac{1}{\Delta Z(s)} \parallel \Delta Z(s) \parallel > \varepsilon \quad \text{f.s.} \\ \sum_{j \geq 0} (Z_i(T_{n,j+1} t) - Z_i(T_{n,j} t)) (Z_k(T_{n,j+1} t) - Z_k(T_{n,j} t)) \frac{1}{Z(T_{n,j+1} \wedge t) - Z(T_{n,j} \wedge t)} \\ - Z(T_{n,j} \wedge t) \parallel \leq \varepsilon + \delta_n \\ + \langle Z_i^C, Z_k^C \rangle(t) + \sum_{s \leq t} \Delta Z_i(s) \Delta Z_k(s) \frac{1}{\Delta Z(s)} \parallel \Delta Z(s) \parallel \leq \varepsilon \quad \text{n.W.} \end{aligned}$$

es gibt eine Teilfolge  $(n') \leq (n)$ , für die die Konvergenz in (2.19) f.s. gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall ist  $\forall i, k$ .

Beweis:

Es gilt für jedes  $t \in R_+$  (siehe (21), 20.5 und 18.10)

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} (Z_i(T_{n,j+1} t) - Z_i(T_{n,j} t)) (Z_k(T_{n,j+1} t) - Z_k(T_{n,j} t)) \\ + \langle Z_i, Z_k \rangle(t) = \langle Z_i^C, Z_k^C \rangle(t) + \sum_{s \leq t} \Delta Z_i(s) \Delta Z_k(s) \quad \text{n.W.} \end{aligned}$$

und es gibt eine Teilfolge so, daß die Konvergenz f.s. gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall ist  $\forall i, k$ . Also genügt es, den ersten Teil von (2.19) nachzuweisen.

Behauptung: Sind  $T_1, \dots, T_m$  die Sprungstellen, an denen  $Z$  um mehr als  $\varepsilon$  springt, dann gibt es ein  $n_0$  so, daß für alle  $\omega, n \geq n_0(\omega)$  gilt:

$$\{T_1(\omega), \dots, T_{m(\omega)}(\omega)\} = \{T_{n,j}(\omega) \mid \|Z(T_{n,j}(\omega), \omega) - Z(T_{n,j-1}(\omega), \omega)\| > \varepsilon + \delta_n\}$$

Beweis:

1)  $\underline{C}$ : sei  $\alpha(\omega) := \min \{\| \Delta Z(T_j(\omega), \omega) \| \mid j = 1, \dots, m(\omega)\}$ ,

dann ist  $\alpha(\omega) > \varepsilon$ . Zu  $T_j(\omega)$  gibt es ein  $T_{n,i}(\omega)$  so, daß

$T_{n,i}(\omega) \leq T_j(\omega) < T_{n,i+1}(\omega)$ . Angenommen, für eine Teilfolge  $(n') \leq (n)$

ist  $T_{n,i}(\omega) < T_j(\omega) < T_{n,i+1}(\omega) \forall n'$ , dann ist  $\varepsilon < \alpha \leq \|Z(T_j(\omega), \omega) -$

$$\begin{aligned} \|Z(T_j(\omega), \omega) - Z(T_{n,i}(\omega), \omega)\| &\leq \|Z(T_j(\omega), \omega) - Z(T_{n,i}(\omega), \omega)\| + \|Z(T_j(\omega), \omega) - \\ &- Z(T_{n,i}(\omega), \omega)\| \leq 2\delta_n + 0 \end{aligned}$$

Dies ist nicht möglich, da  $\varepsilon > 0$  ist.

$$\begin{aligned} 2) \quad \mathbb{Z}: \quad \varepsilon + \delta_n &< \|Z(T_{n,j}(\omega), \omega) - Z(T_{n,j-1}(\omega), \omega)\| \leq \\ &\leq \|Z(T_{n,j}(\omega), \omega) - Z(T_{n,j-1}(\omega), \omega)\| + \|\Delta Z(T_{n,j}(\omega), \omega)\| \leq \\ &\leq \delta_n + \|\Delta Z(T_{n,j}(\omega), \omega)\| \end{aligned}$$

Seien also  $j_1 < \dots < j_m$  die Indices mit  $T_1(\omega) = T_{n,j_1}(\omega)$ , dann ist für  $n \geq n_0(\omega)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} (Z_i(T_{n,j+1} \wedge t) - Z_i(T_{n,j} \wedge t)) (Z_k(T_{n,j+1} \wedge t) - Z_k(T_{n,j} \wedge t)) &\leq \|Z(T_{n,j+1} \wedge t) - \\ &- Z(T_{n,j} \wedge t)\| > \varepsilon + \delta_n \\ = \sum_{l=1}^m (Z_i(T_l \wedge t) - Z_i(T_{n,j_l-1} \wedge t)) (Z_k(T_l \wedge t) - Z_k(T_{n,j_l-1} \wedge t)) &\leq \|\Delta Z(T_l \wedge t)\| > \varepsilon \\ + \sum_{l=1}^m \Delta Z_i(T_l \wedge t) \Delta Z_k(T_l \wedge t) &\leq \|\Delta Z(T_l \wedge t)\| > \varepsilon = \\ = \sum_{s \leq t} \Delta Z_i(s) \Delta Z_k(s) &\leq \|\Delta Z(s)\| > \varepsilon \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingungen für die Verteilungskonvergenz von Semimartingalen werden in dem im folgenden öfter benötigten Théorème (2.21) in [22] gegeben:

### Théorème

- a)  $D \subseteq \mathbb{R}_+$ ;  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum;  
 $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{F}$ ;  $X$  cadlag-Prozeß,  $0$  in  $0$ ,  $(\mathcal{F}_t)$  ist die kleinste Filtrierung, an die  $X$  adaptiert und  $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{F}_0$  ist,  $X$  ist ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen gegeben  $\mathbb{Q}$  und ein  $(\mathcal{F}_t)$ -Semimartingal, quasistetig von links, mit den lokalen Charakteristiken  $(\tilde{B}, C, \nu)$ ;  $X_n$  sind cadlag-Prozesse,  $0$  in  $0$ , an  $(\mathcal{F}_t^n)$  adaptiert und  $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{F}_0^n \forall n$ ; es gibt eine Zerlegung  $X_n = Y_n + Z_n$ , wo  $Y_n$  ein  $(\mathcal{F}_0^n)$ -Semimartingal ist mit den lokalen Charakteristiken  $(\tilde{B}_n, C_n, \nu_n)$   
 (B):  $\forall t \in D \quad Z_n(t) + \tilde{B}_n(t) \rightarrow \tilde{B}(t) \quad \text{n.W.}$

$(\gamma): \forall t, j, k, p, q$

$$C_n(j, k, p, q)(t) + \int f(j, k)(x) f(p, q)(x) v_n(dx \times (0, t)) - \\ - \sum_{s \leq t} \int f(j, k)(x) v_n(dx \times \{s\}) \int f(p, q)(x) v_n(dx \times \{s\}) \rightarrow$$

$$+ C(j, k, p, q)(t) + \int f(j, k)(x) f(p, q)(x) v(dx \times [0, t]) \text{ n.W.}$$

$(\delta): \forall t \in D, g: M^M \rightarrow R$  stetig, 0 in einer 0-Umgebung und einem Grenzwert in  $\infty$  gilt

$$\int g(x) v_n(dx \times [0, t]) \rightarrow \int g(x) v(dx \times [0, t]) \text{ n.W.}$$

$$(UP): \forall t \in D, \varepsilon > 0: \sup_{s \leq t} v_n(\{|X| > \varepsilon\} \times \{s\}) \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

dann gilt für alle  $t_1, \dots, t_r \in D, g$  stetig und beschränkt auf  $(M^M)^r$ :

$$E(g(X_n(t_1), \dots, X_n(t_r)) \mid \mathcal{Q}) \rightarrow E(g(X(t_1), \dots, X(t_r)) \mid \mathcal{Q}) \text{ n.W.}$$

$$b) (\sup B): \forall t > 0: \sup |Z_n(s) + \tilde{B}_n(s) - \tilde{B}(s)| \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

ist  $D$  dicht in  $R_+$ , dann gilt:

$$(\sup B), (\gamma), (\delta) \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$$

Nun zu den Voraussetzungen für die Verteilungskonvergenz. Dabei sind

$(\tilde{B}_n, C_n, v_n)$  die modifizierten lokalen Charakteristiken des Semimartingales  $X_n$ ,  $(\tilde{B}, C, v)$  die von  $X$ .

#### Voraussetzung 1

$$i) \sup_{s \leq t} v_n(\{|X| > \varepsilon\} \times \{s\}) \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall \varepsilon > 0, t$$

$$ii) \text{ für alle } \eta > 0 \text{ mit } v(\partial \{|X| \leq \eta\} \times [0, t]) = 0 \text{ f.s. gilt}$$

$$v_n(\cdot \times [0, t]) \Big|_{\{|X| > \eta\}} \xrightarrow{w} v(\cdot \times [0, t]) \Big|_{\{|X| > \eta\}} \text{ n.W. } \forall t \in D_1$$

$$iii) \text{ für alle } p, q, p', q' \in \{1, \dots, M\} \text{ gilt}$$

$$C_n(p, q, p', q')(t) + \int f(p, q)(x) f(p', q')(x) v_n(dx \times [0, t]) - \\ - \sum_{s \leq t} \int f(p, q)(x) v_n(dx \times \{s\}) \int f(p', q')(x) v_n(dx \times \{s\}) \rightarrow$$

$$+ C(p, q, p', q')(t) + \int f(p, q)(X) f(p', q')(X) \nu(dX \times [0, t]) \text{ n.W.}$$

$$\forall t \in D_1$$

$$\text{iv) } \sup_{s \leq t} |\tilde{B}_n(s) - \tilde{B}(s)| \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t$$

### Voraussetzung 2

Zu jeder Teilfolge  $(n')$  gibt es  $(n'') \subseteq (n')$  mit:

es gibt ein f.s. stetiges,  $f_0$ -meßbares  $\phi$  mit

$$\lim_{n''} \int_s^t |d\tilde{B}_n(\tau)| \leq \phi(t) - \phi(s) \text{ f.s. } \forall s, t \in D_1$$

Diese Voraussetzungen entsprechen in ihrer Bedeutung für alle  $X_n$  den Voraussetzungen I.4 und I.5 im vorigen Kapitel, d. h. die darauf folgenden Bemerkungen gelten entsprechend und außerdem.

zu li): diese Bedingung besagt, daß die vorhersagbaren Sprünge gleichmäßig klein werden. Darüber hinaus läßt sich mit  $|\Delta \tilde{B}_n(s)| =$

$$= \left| \int f(X) \nu_n(dX \times \{s\}) \right| \leq \epsilon + \nu_n(\{|X| > \epsilon\} \times \{s\}) \text{ folgern:}$$

$$\text{li') } \sup_{s \leq t} |\Delta \tilde{B}_n(s)| \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t$$

zu lii): Diese Bedingung sorgt dafür, daß die "Verteilung der Sprünge" von  $X_n$  konvergiert. Außerdem lassen sich zwei überschaubare Kriterien dafür angeben, wann lii) erfüllt ist (gelten auch für I.4ii):

lii') für jede stetige, beschränkte Funktion  $g: \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{R}$ , die in einer Umgebung der 0 verschwindet, gilt

$$\int g(X) \nu_n(dX \times [0, t]) \rightarrow \int g(X) \nu(dX \times [0, t]) \text{ n.W. } \forall t \in D_1$$

lii'') Sei  $D_2$  abzählbar und dicht in  $\mathbb{M}^M$  und  $\nu([-\infty, x] \times [0, t])$  oder  $\nu([x, \infty] \times [0, t])$  stetig in  $x$  für jedes  $x \in D_2$  und  $t \in D_1$ ;

$$\nu_n([-\infty, x] \times [0, t]) \rightarrow \nu([-\infty, x] \times [0, t]) \text{ n.W. für } x \in D_2, t \in D_1, \\ d(0, [-\infty, x]) > 0$$

oder  $v_n(\int_{x, \infty} x [0, t]) \rightarrow v(\int_{x, \infty} x [0, t])$  n.W. für  $x \in D_2$ ,  $t \in D_1$ ,  
 $d(0, \int_{x, \infty}) > 0$

Beweis:

lii') folgt aus lii");

lii"): der zu den betrachteten Mengen gehörende Ring ist abzählbar, man kann also eine auf allen seinen Mengen f.s. konvergente Teilfolge auswählen. Mit [2], Theorem 2.2 folgt die Behauptung.

zu liii): Schreibt man die Zerlegung (2.4) als  $X(t) = X^c(t) + X^d(t) + X^e(t) + \tilde{B}(t)$  mit  $X^d(t) = \int (X \mathbb{1}_{\|X\| \leq \frac{1}{2}} + f(X) \mathbb{1}_{\|X\| > \frac{1}{2}}) (\mu - \nu) (dx \times [0, t])$

$$\begin{aligned} X^e(t) &= \int (X - f(X)) \mu (dx \times [0, t]) = \\ &= \sum_{s \leq t} (\Delta X(s) - f(\Delta X(s))) \end{aligned}$$

so ist die linke Seite von liii) nichts anderes als  $\langle X_n^c + X_n^d \rangle(t)$ .

Man sieht sofort (da  $\Delta \tilde{B}_n(s) = \int f(X) v_n(dx \times \{s\})$ )

Sind 1i) und 2) erfüllt, dann gilt

$$\text{lv)} \quad \sum_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n(s)\|^2 \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t \text{ und daraus ergibt sich dann:}$$

Sind 1i) und 2) erfüllt, dann ist liii) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \text{liii')} \quad C_n(p, q, p', q')(t) &+ \int f(p, q)(X) f(p', q')(X) v_n(dx \times [0, t]) + \\ &+ C(p, q, p', q')(t) + \int f(p, q)(X) f(p', q')(X) v(dx \times [0, t]) \text{ n.W.} \end{aligned}$$

$$\forall t \in D_1, p, q, p', q'$$

zu liv): Wegen (2.5) gilt: ist lii) erfüllt, dann ist liv) äquivalent zu

$$\text{liv')} \quad \sup_{s \leq t} \|B_n(s)\| \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t$$

zu 2): Falls  $\tilde{B}_n$  nicht mehr zufällig ist, d. h. im Wesentlichen, falls  $X_n$  unabhängige Zuwächse hat, ist für Voraussetzung 2) hinreichend:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \int_s^t \|d\tilde{B}_n(\tau)\| = 0 \quad \forall T \in \mathbb{R}_+$$



### 8. Bemerkung

- a)  $X$  ist ein  $(f_t)_t$ -Semimartingal mit unabhängigen Zuwächsen gegeben  $\mathbb{Q}$   
 $\Rightarrow (\tilde{B}, C, v)$  sind  $\mathbb{Q}$ -meßbar (siehe [22], § 2 c)
- b)  $X$  ist außerdem quasi-stetig von links, daher läßt sich eine Version von  $v$  wählen mit  $v(M^M \times \{s\}) = 0 \quad \forall s$  ([22], § 2 c)
- c) mit (2.7) (iv) folgt aus b), daß die entsprechende Version  $\tilde{B}$  stetig ist bzw.  $\Delta \tilde{B}(t) = 0 \quad \forall t$

### 9. Folgerung

Sei Voraussetzung 1 erfüllt,

- a)  $\int g(X) v_n(dx \times [0, t]) + \int g(X) v(dx \times [0, t])$  n.W. für alle  $t \in D_1$  und alle stetigen, beschränkten  $g$ , die auf einer Umgebung von 0 verschwinden.
- b)  $X_n \xrightarrow{D} X$

### Beweis

- a) Es gibt ein  $\eta > 0$  mit  $v(\{ \|X\| \leq \eta \} \times [0, t]) = 0$  f.s. und  $\{X \mid g(X) \neq 0\} \subseteq \{ \|X\| > \eta \}$ . Die Behauptung folgt nun sofort aus Voraussetzung 1i)

- b) gilt nach [22], Theorem (2.21)

Nun definiert man sich die  $(T_{n,j})_{n,j}$ , die dafür sorgen, daß die approximierenden Prozesse  $P_{X_n}$  und  $P_{Y_n}$  "nahe genug" an  $X_n$  und  $Y_n$  liegen, d. h. daß die "Abstände" eine Nullfolge bilden und daß sich die Konvergenz aus Voraussetzung 1 und 2 auf die Parameter von  $P_{X_n}$  überträgt. Doch zunächst zum Stabilitätssatz. Die Voraussetzung für die  $h_n$  ist

### Voraussetzung 3

Die Funktionen  $h_n: \mathbb{R}_+ \times M^M \times M^M \rightarrow M^M$ ,  $n \geq 0$  erfüllen folgende Lipschitz-Bedingung: für ein  $L > 0$  ist

$$\|h_n(t, x, y) - h_n(t', x', y')\| \leq L (|t - t'| + \|x - x'\| + \|y - y'\|) \quad \forall (t, x, y), \\ (t', x', y'), n \geq 0.$$

Weiterhin gilt:  $(t_n, X_n, Y_n) \rightarrow (t_0, X_0, Y_0) \Rightarrow$

$$h_n(t_n, X_n, Y_n) \rightarrow h_0(t_0, X_0, Y_0).$$

#### Voraussetzung 4

$(Y_{n,0})_n$  erfülle eine der folgenden Bedingungen

- 1)  $Y_{n,0}$  und  $X_n$  sind unabhängig und  $Y_{n,0} \xrightarrow{D} Y_0$
- 2)  $Y_{n,0} \rightarrow Y_0$  n.W.  $Y_{n,0}$   $f_{n,0}$ -meßbar,  $Y_0$   $f_0$ -meßbar
- 3)  $Y_{n,0} \rightarrow Y_0$  n.W.  $Y_{n,0}$   $f_{n,0}$ -meßbar,  $Y_0$  unabhängig von  $X$

#### 10. Satz

Sei folgende stochastische Integralgleichung gegeben

$$(J) \quad Z_2(t) = Z_{2,0} + \int_{[0,t]} h(s, Z_1(s-), Z_2(s-)) dZ_1(s) \quad \text{wobei}$$

$$(h, Z_{2,0}, Z_1) = (h_0, Y_0, X), (h_1, Y_{1,0}, X_1), (h_2, Y_{2,0}, X_2), \dots$$

Sind die Voraussetzungen 1 - 4 erfüllt, dann gibt es Lösungen  $Y, Y_1, Y_2, \dots$

der obigen Gleichung (eindeutige und auf  $\mathbb{R}_+$  definierte Lösungen) und es

$$\text{gilt } (Y_{n,0}, X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (Y_0, X, Y)$$

#### Beweis

Man zeigt die Aussage für jedes Intervall  $[0, t_0]$  mit  $t_0 \in D_1$ .

Wegen Voraussetzung 2 müßte man die Teilfolge  $(n'')$  einer Teilfolge  $(n')$

betrachten. Da die Grenzwerte  $X$  (und damit  $Y$ ) fest sind, kann man  $n'' = n$  setzen.

Wähle ein  $t'_0 \in D_1$ ,  $t'_0 > t_0$ , nach Voraussetzung 1 und Folgerung 9 a) gibt es eine monotone Nullfolge  $(\epsilon_n)_n$  mit

#### 2.20

$$\epsilon_n < \|X\| \leq 1 \quad \int x^2(p, q) \nu_n(dx \times [0, t'_0]) - \int_{\epsilon_n < \|X\| \leq 1} x^2(p, q) \nu(dx \times [0, t'_0]) \rightarrow 0 \text{ n.W.} \\ \forall p, q \\ \sup_{s \leq t'_0} \nu_n(\{\|X\| > \epsilon_n\} \times \{s\}) \rightarrow 0 \text{ n.W., } \nu(\partial\{\|X\| \leq \epsilon_n\} \times [0, t'_0]) = 0 \text{ f.s.}$$

(Erinnerung: nach Bemerkung 3b) war o.E.  $v(\partial\{|X| \leq 1\} \times [0, t]) = 0$  f.s.  $\forall t$ )

Nach (2.20) gibt es dann eine monotone Nullfolge  $(\delta_n)_n$  mit

$$P\left(\left|\int_{\epsilon_n < |X| \leq 1} X^2(p, q) \, v_n(dx \times [0, t'_0]) - \int_{\epsilon_n < |X| \leq 1} X^2(p, q) \, v(dx \times [0, t'_0])\right| > \delta_n \text{ für ein } p, q < \delta_n \text{ und } P\left(\sup_{s \leq t_0} v_n(|X| > \epsilon_n \times \{s\}) > \delta_n\right) < \delta_n\right) > \delta_n$$

Sei  $q_0 < \frac{1}{2}$  mit  $v(\partial\{|X| \leq q_0\} \times [0, t'_0]) = 0$  f.s.

Man definiert nun die Stoppzeiten  $T_n$  durch

$$T_n := t_0 \wedge \inf_{n+1} \{t \mid \sup_{s \leq t} v_n(|X| > \epsilon_n \times \{s\}) > \delta_n; \int_0^t |d\tilde{B}_n(s)| > \phi(t'_0) + 1;$$

$$\int_{\epsilon_n < |X| \leq 1} X^2(p, q) \, v_n(dx \times [0, t]) \geq \int_{\epsilon_n < |X| \leq 1} X^2(p, q) \, v(dx \times [0, t'_0]) + 1 \text{ für ein } p, q;$$

$$v_n(\{q_0 < |X|\} \times [0, t]) \geq v(\{q_0 < |X|\} \times [0, t'_0]) + 1;$$

$$C_n(p, q, p, q)(t) + \int_{|X| \leq 1} X^2(p, q) \, v_n(dx \times [0, t]) \geq$$

$$\geq C(p, q, p, q)(t'_0) + \int_{|X| \leq 1} X^2(p, q) \, v(dx \times [0, t'_0]) + 1 \text{ für ein } p, q$$

Man betrachtet nun den gestoppten Prozeß  $X_n(t \wedge T_n)$ .  $T_n$  ist vorhersagbar, da es durch vorhersagbare Prozesse definiert wird. Damit sind aber (auf  $[0, t_0]$ ) die lokalen Charakteristiken des gestoppten Prozesses gerade die bei  $T_n$  gestoppten lokalen Charakteristiken. Angenommen, es gilt

$P(T_n < t_0) = 1 - P(T_n = t_0) \rightarrow 0$ , dann heißt das:

$$P(\omega \mid n_0(\omega) \, \forall n \geq n_0(\omega) \, T_n(\omega) = t_0) = 1$$

Damit sind aber für den gestoppten Prozeß die Voraussetzungen 1 - 4 erfüllt und außerdem die Bedingungen in der Definition von  $T_n$ . Kann man nun zeigen, daß auf  $[0, t_0]$  gilt:

$$(Y_{n,0}, X_n(\cdot \wedge T_n), Y_n(\cdot \wedge T_n)) \xrightarrow{D} (Y_0, X, Y), \text{ dann}$$

gilt auch  $(Y_{n,0}, X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (Y_0, X, Y)$ , d.h. man kann im Folgenden o.B.d.A.

entnehmen, daß die Bedingungen in der Definition von  $T_n$  erfüllt sind, vorausgesetzt,  $P(T_n < T_0) \rightarrow 0$ .

Dazu:

Sei  $\frac{n}{n+1} t'_0 > t_0$ , dann folgt, daß eine der Bedingungen in der Definition

von  $T_n$  mit  $t = t'_0$  erfüllt sein muß. Man weist nach, daß die Wahrscheinlichkeit dafür gegen 0 konvergiert. Außer bei der letzten Bedingung folgt dies sofort aus der Wahl der  $\delta_n$ , Voraussetzung 1 oder Voraussetzung 2.

Für die letzte Bedingung muß man zusätzlich zeigen, daß

$$\sum_{s \leq t'_0} (f(p, q) \nu_n(dx \times \{s\}))^2 \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall p, q.$$

Nach (2.7) (iv) ist  $f(X) \nu_n(dx \times \{s\}) = \Delta \tilde{B}_n(s)$ ,

$$\text{also } (f(p, q) \nu_n(dx \times \{s\}))^2 \leq |\Delta \tilde{B}_n(s)|^2,$$

$$\sum_{s \leq t'_0} (f(p, q) \nu_n(dx \times \{s\}))^2 \leq \sum_{s \leq t'_0} |\Delta \tilde{B}_n(s)|^2 \leq$$

$$\leq \sup_{s \leq t'_0} |\Delta \tilde{B}_n(s)| \int_0^{t'_0} d\tilde{B}_n(s)$$

Da nach Voraussetzung 2  $\lim_n \int_0^{t'_0} d\tilde{B}_n(s) \leq \phi(t_0)$  ist, genügt es also,

$$\sup_{t \leq t'_0} |\Delta \tilde{B}_n(s)| \rightarrow 0 \text{ n.W. zu zeigen.}$$

Nach Voraussetzung 1 iv) gilt:  $\sup_{t \leq t'_0} |\tilde{B}_n(t) - \tilde{B}(t)| \rightarrow 0$  n.W., da nach

Bemerkung 8c)  $\tilde{B}$  stetig ist, folgt daraus die Behauptung.

Nun definiert man die Stoppzeiten  $(T'_{n,j})_{n,j}$  durch:  $T'_{n,0} = 0$

$$T'_{n,j+1} = \{T'_{n,j} + \frac{1}{n}\} \wedge \inf \{t > T'_{n,j} \mid \|X_n^C(t) - X_n^C(T'_{n,j})\| \geq \delta_n; \|X_n(t) - X_n(T'_{n,j})\| \geq \frac{\delta_n}{2},$$

$$\| \int_{X_n \leq \epsilon_n} X (\mu_n - \nu_n(dx \times ]T'_{n,j}, t]) \| \geq \delta_n; \int_{T'_{n,j}}^t \|d\tilde{B}_n(s)\| \geq \delta_n;$$

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\epsilon_n < \|x\| \leq 1} x v_n(dx \times J_{n,j}^{T',t}) \right\| \geq \delta_n ; \quad \|B_n(t) - B_n(T'_{n,j})\| \geq \delta_n ; \\ & \int_{\|x\| \leq \epsilon_n} \|x\|^2 v_n(dx \times J_{n,j}^{T',t}) \geq \delta_n ; \quad \int_{\|x\| \leq \epsilon_n} \|x\|^2 \mu_n(dx \times J_{n,j}^{T',t}) \geq \delta_n ; \\ & v_n(\{\|x\| > \epsilon_n\} \times J_{n,j}^{T',t}) \geq \delta_n ; \quad \mu_n(\{\|x\| \geq \epsilon_n\} \times J_{n,j}^{T',t}) \geq \delta_n \end{aligned}$$

Man hält nun zunächst  $n$  fest und wählt  $R$  als laufenden Index in Lemma 5,6 und 7. Es ist dann

$$\begin{aligned} \tilde{X}_n(t) &= \begin{pmatrix} X_n(t) & 0 \\ 0 & X_n(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y}_{n,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_{n,0} \end{pmatrix}, \\ \tilde{h}_n(f, \omega, t) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & h_n(t-, f_1(t-), f_2(t-)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Lemma 4 hat man auf  $R_+$  eine eindeutige, starke Lösung  $\tilde{Y}_n$  mit

$$\tilde{Y}_n(t) = \tilde{Y}_{n,0} + \int_{J_{0,t}} \tilde{h}_n(\tilde{Y}_n, s) d\tilde{X}_n(s)$$

Sei  $(\eta_{R1})_R$  eine monotone Nullfolge. In Lemma 7 setzt man

$$T'_{n,j} = : S_{1,j} = : S_{2,j} = : \dots \quad j = 0, 1, \dots$$

Nach Lemma 7 findet man für jedes  $\epsilon \in \{1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ , also auch für

alle diese  $\epsilon$  gemeinsam eine Folge  $(T_{R,j}^1)_{R,j}$  und eine monotone Nullfolge

$$(\eta_{R,2})_R \text{ mit } (T'_{n,j})_j \subset (T_{R,j}^1)_j \quad \forall R$$

$$P \left( \sup_{t \leq t'_0} \left| \sum_{j \geq 0} (X_n(p, q) (T_{R,j+1}^1 \wedge t) - X_n(p, q) (T_{R,j}^1 \wedge t)) \right| \right.$$

$$\cdot (X_n(p', q') (T_{R,j+1}^1 \wedge t) - X_n(p', q') (T_{R,j}^1 \wedge t)) \Big|_{X_n(T_{R,j+1}^1 \wedge t)}$$

$$- X_n(T_{R,j}^1 \wedge t) \Big| \leq \epsilon + \eta_{R1} \quad (*)$$

$$- X_n^C(p, q), X_n^C(p', q') (t) + \sum_{s \leq t} \Delta X_n(p, q)(s) \Delta X_n(p', q')(s)$$

$$1 \Big| \Delta X_n(s) \Big| \leq \epsilon \quad | > \eta_{R2} ,$$

für ein  $p, q; p', q', \varepsilon \in \{1, \dots, \varepsilon_n\} \subset \eta_{R2}$

Für Lemma 5 und 6 wählt man nun

$S_{R,j} := T_{R,j}^1 \quad \forall R, j$ ; man erhält dort eine Folge  $(T_{R,j}^2)_{R,j}$  so, daß für

den dadurch definierten Partialsummenprozeß  $\hat{Y}_{n,R}$  gilt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P \left( \sup_{t \leq t'_0} \|\hat{Y}_{n,R}(t) - \tilde{Y}_n(t)\| > \varepsilon \right) = 0 \quad \forall \varepsilon.$$

Also findet man eine Teilfolge  $(\eta_{R,3}) \subseteq (\eta_{R,2})$  mit  $\eta_{R,3} \geq \eta_{R,2} \quad \forall R$ , so daß

$P \left( \sup_{t \leq t'_0} \|\hat{Y}_{n,R}(t) - \tilde{Y}_n(t)\| > \eta_{R,3} \right) < \eta_{R,3} \quad \forall R$ , insbesondere ist auch

$$(T_{R,j}^1)_j \subseteq (T_{R,j}^2)_j \quad \forall R.$$

Mit dieser Folge  $(T_{R,j}^2)_{R,j}$  geht man zurück in Lemma 7 und setzt dort

$S_{R,j} := T_{R,j}^2$  aber nun  $\delta_R := 2 \eta_{R,1}$ . In Lemma 7 wird nun hierzu eine Folge

$(T_{R,j}^3)_{R,j}$  definiert.

Man zeigt  $(T_{R,j}^3)_j = (T_{R,j}^2)_j \quad \forall R : \mathbb{Z}$  : nach Definition;

$$\subseteq: T_{R,0}^3 = 0 = T_{R,0}^2, \text{ also } T_{R,i}^3 \in (T_{R,j}^2)_j \quad i = 0, \dots, 1$$

Angenommen:  $T_{R,1+1}^3 \notin (T_{R,j}^2)_j$ ; nach Definition in Lemma 7 ist

$$(T_{R,j}^2)_j = (S_{R,j})_j \subseteq (T_{R,j}^3)_j \quad \forall R, \text{ also ist dann wegen } (T_{R,j}^1)_j$$

$$\subseteq (T_{R,j}^2)_j \quad \forall R \text{ für ein } i: T_{R,i}^1 < T_{R,1+1}^3 < T_{R,i}^2 \text{ und } T_{R,1}^3 \geq T_{R,i}^1, \text{ daher}$$

$$2 \eta_{R,1} \leq \|x_n(T_{R,1+1}^3) - x_n(T_{R,1}^3)\| \leq$$

$$\leq \|x_n(T_{R,1+1}^3) - x_n(T_{R,i}^1)\| + \|x_n(T_{R,1}^3) - x_n(T_{R,i}^1)\| < 2 \eta_{R,1}$$

Man findet also nach Lemma 7 dann eine Teilfolge  $(R') \leq (R)$  und  $(\eta_{R'})$  mit  $\eta_{R'} \geq \eta_{R,3}$  so, daß die Ungleichung in (\*) mit  $(T_{R',j}^3)$  und  $(\eta_{R'})_{R'}$  an Stelle von  $(T_{R,j}^1)$  und  $(\eta_{R,2})$  erfüllt ist.

Zu  $n$  wähle  $R'(n)$  so, daß  $\eta_{R'(n)} < \delta_n$  und setze  $\eta_n = \eta_{R'(n)}, 1'$

$T_{n,j} = T_{R'(n),j}^3, j = 0, 1, \dots$ , dann gilt mit  $\hat{Y}_n = \hat{Y}_{n,R(n)} :$

(\*\*)  $P \left( \sup_{t \leq t'_0} \|\hat{Y}_n(t) - \tilde{Y}_n(t)\| > \delta_n \right) < \delta_n$  und (entspricht (X)):

$$P \left( \sup_{t \leq t'_0} \left| \sum_{j \geq 0} (X_n(p, q)(T_{n,j+1} \wedge t) - X_n(p, q)(T_{n,j} \wedge t)) \right. \right.$$

$$\left. - (X_n(p', q')(T_{n,j+1} \wedge t) - X_n(p', q')(T_{n,j} \wedge t)) \right| \leq \epsilon + \eta'_n$$

$$- (X_n(p, q)(T_{n,j} \wedge t) - X_n(p', q')(T_{n,j} \wedge t)) \leq \epsilon + \eta'_n$$

$$+ (X_n(p, q)(T_{n,j} \wedge t) - X_n(p', q')(T_{n,j} \wedge t)) \leq \epsilon + \eta'_n$$

$$\left| \Delta X_n(s) \right| \leq \epsilon \quad \left| \right| > \delta_n$$

für ein  $p, q; p', q'; \epsilon \in \{1, \dots, \epsilon_n\} \} < \delta_n$

Mit Hilfe der so bestimmten  $(T_{n,j})_{n,j}$  setzt man nun  $f_{n,j} = f_{T_{n,j}}$  und

$X_{n,j} = X_n(T_{n,j}) - X_n(T_{n,j-1})$ ; die Prozesse  $X_n$  und  $Y_n$  aus Kapitel I sind dann identisch mit  $\Delta X_n$  und  $\Delta Y_n$  aus (2.15).

Nun muß gezeigt werden, daß für die so definierten Variablen die Voraussetzungen I.4 und I.5 aus dem letzten Kapitel erfüllt sind.

Voraussetzung I.4.i):

Nach Definition der  $T_{n,j}$  ist dann für großes  $n$ :

$$\left| X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) \right| \leq \frac{\delta_n}{2} + \left| \Delta X_n(T_{n,j+1}) \right|, \text{ also (da } \delta_n > 0)$$

$$\{ \left| X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) \right| > \epsilon \} \subseteq \{ \left| \Delta X_n(T_{n,j+1}) \right| > \epsilon - \frac{\delta_n}{2} \} \subseteq$$

$$\subseteq \{ \left| \Delta X_n(T_{n,j+1}) \right| > \frac{\epsilon}{2} \}$$

$$1_{\{\|\Delta X_n(T_{n,j+1})\| > \frac{\varepsilon}{2}\}} = \delta_{X_n(T_{n,j+1})}(\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}) = \mu_n(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\})$$

$$\begin{aligned} \text{damit: } \max \{P(\|X_{n,j}\| > \varepsilon \mid f_{n,j-1}) \mid j = 0, \dots, k_n(t_0)\} &= \\ = \max \{P(\|X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})\| > \varepsilon \mid f_{T_{n,j}}) \mid j = 0, \dots, k_n(t_0)\} &\leq \\ \leq \max \{E(\mu_n(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\}) \mid T_{n,j}) \mid j = 0, \dots, k_n(t_0)\} &= \\ = \max \{E(v_n(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\}) \mid f_{T_{n,j}}) \mid j = 0, \dots, k_n(t_0)\} \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.5 in [24] folgt für  $n, \tilde{n} > 0$ :

$$\begin{aligned} P(\max\{E(v_n(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\}) \mid f_{T_{n,j}}) \mid j = 0, \dots, k_n(t_0)\} > \eta \mid f_0) &\leq \\ \leq \tilde{\eta} + P(\bigcup_{j=0}^{k_n(t_0)} P(E(v_n(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\}) \mid f_{T_{n,j}}) > \eta \mid f_{T_{n,j-1}}) > \tilde{\eta} \mid f_0) &\leq \\ \leq \tilde{\eta} + \frac{1}{n} E\left(\bigcup_{j=0}^{k_n(t_0)-1} \frac{1}{n^2} E\left(E^2(v_n(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\}) \mid f_{T_{n,j-1}}) \mid f_0\right)\right) &\leq \\ \leq \tilde{\eta} + \frac{1}{n} \frac{1}{2} E\left(\bigcup_{j=0}^{k_n(t_0)} E(v_n^2(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\}) \mid f_{T_{n,j-1}}) \mid f_0\right) &= \\ = \tilde{\eta} + \frac{1}{n} \frac{1}{2} E\left(\bigcup_{j=0}^{k_n(t_0)} v_n^2(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\}) \mid f_0\right) &\leq \\ \leq \tilde{\eta} + \frac{1}{n} \frac{1}{2} E\left(v_n(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times [0, t_0]) \sup_{s \leq t_0} v_n(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{s\}) \mid f_0\right) & \\ \leq \tilde{\eta} + \frac{1}{n} \frac{1}{2} E\left(\frac{4}{\varepsilon^2} \int_{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}} \|X\|^2 v_n(dx \times [0, t_0]) \sup_{s \leq t_0} v_n(\{\|X\| > \frac{\varepsilon}{2}\} \times \{s\}) \mid f_0\right) \end{aligned}$$

+  $\tilde{\eta}$  n.W.

Voraussetzung I.4 ii):

Zunächst gilt folgende Gleichung:



$$\begin{aligned} X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) &= \int_{\epsilon_n < \|X\|} X \mu_n(dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) = \\ &= X_n^C(T_{n,j+1}) - X_n^C(T_{n,j}) + \int_{\|X\| \leq \epsilon_n} X (\mu_n - \nu_n)(dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) + \\ &\quad + \int_{\epsilon_n < \|X\| \leq 1} X \nu_n(dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) + B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|X_n^C(T_{n,j+1}) - X_n^C(T_{n,j})\| &\leq \delta_n; \\ \left\| \int_{\|X\| \leq \epsilon_n} (\mu_n - \nu_n)(dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \right\| &\leq \\ &\leq \delta_n + \left\| \int_{\|X\| \leq \epsilon_n} X \mu_n(dX \times \{T_{n,j+1}\}) \right\| + \left\| \int_{\|X\| \leq \epsilon_n} X \nu_n(dX \times \{T_{n,j+1}\}) \right\| \leq \delta_n + 2 \epsilon_n; \\ \left\| \int_{\epsilon_n < \|X\| \leq 1} X \nu_n(dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \right\| &\leq \delta_n + \nu_n(\{\|X\| > \epsilon_n\} \times \{T_{n,j+1}\}) \leq \\ &\leq 2 \delta_n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j})\| &\leq \\ &\leq \|\tilde{B}_n(T_{n,j+1}) - \tilde{B}_n(T_{n,j})\| + \left\| \int (X - f(X)) \frac{1}{\|X\|} \nu_n(dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \right\| \leq \\ &\leq \delta_n + \|\Delta \tilde{B}_n(T_{n,j+1})\| + 2 \nu_n(\{\|X\| > \frac{1}{2}\} \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta \tilde{B}_n(T_{n,j+1})\| &= \left\| \int f(X) \nu_n(dX \times \{T_{n,j+1}\}) \right\| \leq \\ &\leq \nu_n(\{\|X\| > \frac{1}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\}) \leq \delta_n; \end{aligned}$$

$$\nu_n(\{\|X\| > \frac{1}{2}\} \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \leq \delta_n + \nu_n(\{\|X\| > \frac{1}{2}\} \times \{T_{n,j+1}\}) \leq 2 \delta_n$$

$$\text{also } \|B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j})\| \leq 6 \delta_n.$$

Damit wird

$$\left\| X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) - \int_{\epsilon_n < \|X\|} X \mu_n(dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \right\| \leq 8 \delta_n + E_n$$

Gezeigt wird nun

$$(2.21) \quad t \in D_1, A \in \mathcal{B}_{M^M} \text{ mit } d(A, 0) > 0 \text{ und } \nu(\partial A \times [0, t]) = 0 \text{ f.s.}$$

$$P_n (A \times [0, t]) = \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} P (X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j}) \in A \mid f_{T_{n,j}}) + \\ + \nu (A \times [0, t]) \quad n.w.$$

Für  $\delta > 0$  sei  $F_\delta := \{X \mid d(X, A) \leq \delta\}$ ,  $G_\delta := \{X \mid d(X, M^M \setminus A) > \delta\}$

Wähle  $\epsilon, \delta, n_0$  so, daß  $F_\delta \subseteq \{\|X\| > \epsilon\}$  und  $\delta \delta_n + \epsilon_n < \delta_n \quad \forall n \geq n_0$  und

$\nu(\partial F_\delta \times [0, t_0]) = \nu(\partial G_\delta \times [0, t_0]) = 0$  f.s.; es ist  $F_\delta$  abgeschlossen,

$G_\delta$  offen und  $G_\delta \leq A \leq F_\delta$ ; damit wird für  $n \geq n_0$

$$\sum_{j=0}^{k_n(t)-1} P \left( \int_{\|X\| > \epsilon_n} X \mu_n(dX \mid T_{n,j}, T_{n,j+1}) \in G_\delta \mid f_{T_{n,j}} \right) - \nu(F_\delta \times [0, t]) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} P (X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j}) \in A \mid f_{T_{n,j}}) - \nu(A \times [0, t]) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} P \left( \int_{\|X\| > \epsilon_n} X \mu_n(dX \mid T_{n,j}, T_{n,j+1}) \in F_\delta \mid f_{T_{n,j}} \right) - \nu(G_\delta \times [0, t])$$

Damit wird für  $\eta > 0$ :

$$P \left( \left| \sum_{j=n}^{k_n(t)-1} P (X_{n,j} \in A \mid f_{T_{n,j-1}}) - \nu(A \times [0, t]) \right| \geq \eta \right) \leq$$

$$\leq P \left( \left| \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} P \left( \int_{\|X\| > \epsilon_n} X \mu_n(dX \mid T_{n,j}, T_{n,j+1}) \in G_\delta \mid f_{T_{n,j}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \nu(F_\delta \times [0, t]) \right| \geq \eta \right) +$$

$$+ P \left( \left| \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} P \left( \int_{\|X\| > \epsilon_n} X \mu_n(dX \mid T_{n,j}, T_{n,j+1}) \in F_\delta \mid f_{T_{n,j}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \nu(G_\delta \times [0, t]) \right| \geq \eta \right) \leq$$

$$\leq P \left( \left| \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} P \left( \int_{\|X\| > \epsilon_n} X \mu_n(dX \mid T_{n,j}, T_{n,j+1}) \in G_\delta \mid f_{T_{n,j}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \nu(G_\delta \times [0, t]) \right| \geq \frac{\eta}{2} \right) +$$

$$+ P \left( \left| \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} P \left( \int_{\|X\| > \epsilon_n} X \mu_n(dX \mid T_{n,j}, T_{n,j+1}) \in F_\delta \mid f_{T_{n,j}} \right) - \right. \right.$$

$$- \nu (F_\delta \times [0, t]) \mid \geq \frac{n}{2} ) + \\ + 2 P ( \nu (F_\delta \setminus G_\delta) \times [0, t] \geq \frac{n}{2} )$$

Kann man nun zeigen, daß für  $\delta \rightarrow 0$  der letzte Summand und der  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  der ersten beiden Summanden beliebig klein wird, so ist (2.21) bewiesen. Für den letzten Summanden folgt dies sofort, da  $(F_\delta \setminus G_\delta) \times [0, t] \subseteq \partial A \times [0, t] \subseteq \partial A \times [0, t_0]$  und  $\nu(\partial A \times [0, t_0]) = 0$  f.s.

Zum ersten Summanden:

Nach Wahl der  $T_{n,j}$  ist  $\mu_n(\{|X| > \epsilon_n\} \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) = 0$ , also für  $\epsilon_n < \epsilon$  d. h.  $F_\delta \subseteq \{|X| > \epsilon_n\}$  ist

$$\int_{|X| > \epsilon_n} X \mu_n(dx \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) = \Delta X_n(T_{n,j+1}) \mid \Delta X_n(T_{n,j+1}) \mid > \epsilon_n,$$

$$\text{also } \int_{|X| > \epsilon_n} X \mu_n(dx \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \in G_\omega \Leftrightarrow$$

$$\Delta X_n(T_{n,j+1}) \mid \Delta X_n(T_{n,j+1}) \mid > \epsilon_n \in G_\delta \Leftrightarrow \Delta X_n(T_{n,j+1}) \in G_\delta$$

$$\text{also } 1_{\{\int_{|X| > \epsilon_n} X \mu_n(dx \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \in G_\delta\}} = 1_{G_\delta}(\Delta X_n(T_{n,j+1})) = \\ = \mu_n(G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) = \mu_n(G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[)$$

Damit ist

$$P(\int_{|X| > \epsilon_n} X \mu_n(dx \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \in G_\delta \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) =$$

$$= E(\mu_n(G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) =$$

$$= E(\nu_n(G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}), \text{ somit}$$

$$\sum_{j=0}^{k_n(t)-1} P(\int_{|X| > \epsilon_n} X \mu_n(dx \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \in G_\delta \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) - \nu(G_\delta \times [0, t]) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E(\nu_n(G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) - \nu(G_\delta \times [0, t]) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} (E (v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \mid f_{T_{n,j}}) - v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[)) \\
 &+ v_n (G_\delta \times ]T_{n,k_n(t)}, t]) + v_n (G_\delta \times [0, t]) - v (G_\delta \times [0, t]) \\
 v_n (G_\delta \times ]T_{n,k_n(t)}, t]) &\leq v_n (\{ \|X\| > \epsilon_n \} \times ]T_{n,k_n(t)}, T_{n,k_n(t)} + 1]) \leq \\
 &\leq \delta_n + v_n (\{ \|X\| > \epsilon_n \} \times \{T_{n,k_n(t)} + 1\}) \leq 2 \delta_n \rightarrow 0 ; \\
 \text{da } v (\partial G_\delta \times [0, t_0]) &= 0 \text{ f.s. ist, folgt } v_n (G_\delta \times [0, t]) \rightarrow v (G_\delta \times \\
 &\times [0, t]) \text{ n.W. ;}
 \end{aligned}$$

Auf den ersten Summanden wendet man Lemma A.3 an:

$$v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \leq 2 \delta_n \Rightarrow \text{für hinreichend großes } n \text{ ist}$$

$$\sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E (v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \mid f_{T_{n,j}}) - v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) > \epsilon \mid f_{T_{n,j}}) = 0 ;$$

$$P \left( \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E (v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \mid f_{T_{n,j}}) > R \mid f_0 \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{R} E \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E (v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \mid f_{T_{n,j}}) \mid f_0 \leq$$

$$\leq \frac{1}{R} E (v_n (G_\delta \times [0, t_0]) \mid f_0) \leq (\text{da } G_\delta \subset \{ \|X\| > \epsilon \})$$

$$\leq \frac{1}{R} E \left( \frac{1}{\epsilon} \int \min(1, \|X\|^2) v_n (dX \times [0, t_0]) \mid f_0 \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{R\epsilon} \left( \int \min(1, \|X\|^2) v (dX \times [0, t_0]) + 1 + \delta_n \right) \text{ nach (2.20) und}$$

Definition von  $T_n$  ;

$$\text{also } \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E (v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \mid f_{T_{n,j}}) > R \right) = 0 ;$$

damit gilt aber nun nach erwähntem Lemma:

$$\sum_{j=0}^{k_n(t)-1} v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) - \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E (v_n (G_\delta \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \mid f_{T_{n,j}})$$

$$|f_{T_{n,j}}) \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

und damit

$$k_n(t)-1 \sum_{j=0} P \left( \int_{|X|>\epsilon_n} X \mu_n (dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \in G_\delta |f_{T_{n,j}}) + v (G_\delta \times [0,t]) \text{ n.W.} \right.$$

ebenso zeigt man

$$k_n(t)-1 \sum_{j=0} P \left( \int_{|X|>\epsilon_n} X \mu_n (dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \in F_\delta |f_{T_{n,j}}) + v (F_\delta \times [0,t]) \text{ n.W.} \right.$$

Damit ist also (2.21) bewiesen.

Da  $M^M$  separabel ist, folgt aus (2.21), daß Voraussetzung I. 4ii erfüllt ist.

Zu Voraussetzung I. 4iv):

Aus Darstellung (2.3) ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & (X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})) \frac{1}{2} \|X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})\| \leq 1 - (B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j})) = \\ & = \int_{|X|>1} X \mu_n (dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) - (X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})) \frac{1}{2} \|X_n(T_{n,j+1}) - \\ & \quad - X_n(T_{n,j})\| > 1 \\ & + X_n^C(T_{n,j+1}) - X_n^C(T_{n,j}) + \int_{|X|\leq 1} X (\mu_n - \nu_n) (dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) \end{aligned}$$

$X_n^C$  und  $X_n^d$  sind lokale Martingale, also ist

$$E (X_n^C(T_{n,j+1}) - X_n^C(T_{n,j}) | f_{T_{n,j}}) = E \left( \int_{|X|\leq 1} X (\mu_n - \nu_n) (dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) | f_{T_{n,j}} \right) = 0,$$

$$\text{also } E \left( (X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})) \frac{1}{2} \|X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})\| \leq 1 - \right.$$

$$(B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j})) | f_{T_{n,j}}) =$$

$$= E \left( \int_{|X|>1} X \mu_n (dX \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}[) - (X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})) \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \|X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})\| > 1 | f_{T_{n,j}} \right)$$

Nach Definition der  $T_{n,j}$  ist  $\mu_n (\{ \|X\| > 1 \} \times J_{T_{n,j}, T_{n,j+1}}) = 0$ ,

also  $\int_{\|X\|>1} X \mu_n (dX \times J_{T_{n,j}, T_{n,j+1}}) = \Delta X_n (T_{n,j+1}) \frac{1}{\|\Delta X_n (T_{n,j+1})\|} \|\Delta X_n (T_{n,j+1})\| > 1$ ;

$$\int_{\|X\|>1} X \mu_n (dX \times J_{T_{n,j}, T_{n,j+1}}) - (X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})) \cdot \\ \cdot \frac{1}{\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\|} \|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| > 1 =$$

$$= \Delta X_n (T_{n,j+1}) \frac{1}{\|\Delta X_n (T_{n,j+1})\|} \|\Delta X_n (T_{n,j+1})\| > 1 - (X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})) \cdot \\ \cdot \frac{1}{\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\|} \|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| > 1 =$$

$$= (X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})) \frac{1}{\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\|} \|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| > 1$$

$$\frac{1}{\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\|} \|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| > 1 +$$

$$+ \Delta X_n (T_{n,j+1}) \frac{1}{\|\Delta X_n (T_{n,j+1})\|} \|\Delta X_n (T_{n,j+1})\| > 1 \frac{1}{\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\|} \|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| \leq 1 -$$

$$- (X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})) \frac{1}{\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\|} \|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| > 1 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\|\Delta X_n (T_{n,j+1})\|} \|\Delta X_n (T_{n,j+1})\| \leq 1$$

Nach Wahl der  $T_{n,j}$  ist  $\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| \leq \delta_n$  damit gilt

$$\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| \geq \|\Delta X_n (T_{n,j})\| - \delta_n \text{ also}$$

$$\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| \leq 1 \Rightarrow \|\Delta X_n (T_{n,j})\| \leq 1 + \delta_n \text{ und ebenso}$$

$$\|\Delta X_n (T_{n,j+1})\| \leq 1 \Rightarrow \|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| \leq 1 + \delta_n, \text{ insgesamt:}$$

$$\|E((X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})) \frac{1}{\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\|} \|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| \leq 1 - (B_n (T_{n,j+1}) -$$

$$- B_n (T_{n,j})) \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}})\| \leq$$

$$\leq \delta_n E(\frac{1}{\|\Delta X_n (T_{n,j+1})\|} \|\Delta X_n (T_{n,j+1})\| \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) +$$

$$+ (1 + \delta_n) E(1_{\|\Delta X_n (T_{n,j+1})\| \leq 1 + \delta_n} \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) +$$

$$+ (1 + \delta_n) E(1_{\|X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j})\| \leq 1 + \delta_n} \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) +$$

Man zeigt nun, daß die Summe über  $j$  für jeden einzelnen der drei Summanden n.W. gegen 0 konvergiert.

$$\begin{aligned}
 & P \left( \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} \delta_n E (1_{\{\|\Delta X_n(T_{n,j+1})\| > 1\}} \mid f_{T_{n,j}}) > \eta \mid f_0 \right) = \\
 & = P \left( \delta_n \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E (\mu_n (\{ \|X\| > 1\} \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}]) \mid f_{T_{n,j}}) > \eta \mid f_0 \right) = \\
 & = P \left( \delta_n \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E (v_n (\{ \|X\| > 1\} \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}]) \mid f_{T_{n,j}}) > \eta \mid f_0 \right) \leq \\
 & \leq \frac{\delta_n}{\eta} E \left( \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E (v_n (\{ \|X\| > 1\} \times ]T_{n,j}, T_{n,j+1}]) \mid f_{T_{n,j}}) \mid f_0 \right) \leq \\
 & \leq \frac{\delta_n}{\eta} E (v_n (\{ \|X\| > 1\} \times [0, t_0]) \mid f_0) \leq \frac{\delta_n}{\eta} (v_n (\{ \|X\| > 1\} \times [0, t_0]) + 1) \rightarrow 0 \text{ f.s.}
 \end{aligned}$$

auf die gleiche Weise erhält man

$$\begin{aligned}
 & P \left( \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} (1 + \delta_n) E (1_{\{1 < \|\Delta X_n(T_{n,j+1})\| \leq 1 + \delta_n\}} \mid f_{T_{n,j}}) > \eta \mid f_0 \right) \leq \\
 & \leq \frac{1 + \delta_n}{\eta} E (v_n (\{ 1 < \|X\| \leq 1 + \delta_n\} \times [0, t_0]) \mid f_0) \rightarrow 0 \text{ n.W.}
 \end{aligned}$$

da  $v (\partial \{ \|X\| > 1\} \times [0, t_0]) = 0$  f.s., Voraussetzung 2 ii) gilt und  $v_n (\{ 1 < \|X\| \leq 1 + \delta_n\} \times [0, t_0]) \leq v (\{ \|X\| > 1\} \times [0, t_0]) + 1$  ist.

$$\begin{aligned}
 & P \left( \sum_{j=0}^{k_n(t)} (1 + \delta_n) E (1_{\{1 < \|X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})\| \leq 1 + \delta_n\}} \mid f_{T_{n,j}}) > \eta \right) \leq \\
 & = P \left( p_n (\{ 1 < \|X\| \leq 1 + \delta_n\} \times [0, t_0]) > \frac{\eta}{1 + \delta_n} \right) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

da  $v (\partial \{ \|X\| > 1\} \times [0, t_0]) = 0$  f.s. und wie oben gezeigt

$$p_n \Big|_{\{\|X\| > 1\}} \xrightarrow{n.W.} v \Big|_{\{\|X\| > 1\}} \text{ n.W.}$$

Damit gilt aber nun

$$(2.22) \quad \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E ((X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}))^1 \|X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})\| \leq 1 \mid f_{T_{n,j}})$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{k_n(t)} E (B_n (T_{n,j+1}) - B_n (T_{n,j}) \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) \mid \leq \\
 & \leq \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E ((X_n (T_{n,j+1}) - X_n (T_{n,j}))^2 \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) \mid \leq 1 \\
 & - (B_n (T_{n,j+1}) - B_n (T_{n,j})) \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) \mid \rightarrow 0 \text{ n.W.}
 \end{aligned}$$

Mit Lemma A.3 zeigt man nun, daß komponentenweise gilt

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} (B_n (T_{n,j+1}) (i,1) - B_n (T_{n,j}) (i,1)) - \\
 & \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E (B_n (T_{n,j+1}) (i,1) - B_n (T_{n,j}) (i,1)) \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) \mid \rightarrow 0 \text{ n.W.}
 \end{aligned}$$

Man zeigt, daß  $\sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E ((B_n (T_{n,j+1}) (i,1) - B_n (T_{n,j}) (i,1))^2 \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) \mid \rightarrow 0 \text{ n.W.,}$

dafür hinreichend ist

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E ((B_n (T_{n,j+1}) (i,1) - B_n (T_{n,j}) (i,1))^2 \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) \mid \mathcal{F}_0) = \\
 & \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} (B_n (T_{n,j+1}) (i,1) - B_n (T_{n,j}) (i,1))^2 \mid \mathcal{F}_0) \rightarrow 0 \text{ n.W.}
 \end{aligned}$$

Wegen  $\Delta B_n (T_{n,j+1}) = \int_{\|x\| \leq 1} x \vee_n (dx \times \{T_{n,j+1}\})$  ist

$$\begin{aligned}
 |B_n (T_{n,j+1}) - B_n (T_{n,j})| & \leq \delta_n + \varepsilon_n + \int_{\varepsilon_n < \|x\| \leq 1} \|x\| \vee_n (dx \times \{T_{n,j+1}\}) \leq \\
 & \leq 2 \delta_n + \varepsilon_n
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Aus der Darstellung (2.5) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_0^t |dB_n (s)| & \leq \int_0^t |d\tilde{B}_n (s)| + \frac{1}{2} \int_{\|x\| \leq 1} \|x - f(x)\| \vee_n (dx \times [0, t]) \leq \\
 (2.23) \quad & \leq \phi (t_0) + 1 + 2 (\vee (\{\|x\| > q_0\} \times [0, t_0]) + 1)
 \end{aligned}$$

Da  $\phi$  und  $\vee \mathcal{F}_0$ -meßbar sind, folgt damit die Behauptung.

Aus der komponentenweisen Konvergenz folgt aber



$$(2.24) \quad \left\| \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} (B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j})) - \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E(B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j}) \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) \right\| \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

Aus Voraussetzung 1 iv) und Darstellung (2.5) folgt aber nun mit (2.22):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k_n(t)-1} E((X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}))^1 \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) \|X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j})\| \leq 1 \mid \mathcal{F}_{T_{n,j}}) \\ & \rightarrow \bar{B}(t) + \int_{\|x\| \leq 1} (x - f(x)) \vee (dx \times [0, t]) \text{ n.W.} \end{aligned}$$

Zu Voraussetzung I. 4 iii):

Sei  $t \in D_1$ ,  $t \leq t_0$ ; da nachgewiesen ist, daß Voraussetzung I. 4 ii)

erfüllt ist, und wegen Voraussetzung 1 ii) findet man eine Folge  $(\epsilon'_n) \leq$

$(\epsilon_n)$  mit  $\epsilon'_n \geq \epsilon_n \forall n$  und

$$\begin{aligned} (2.25) \quad & \int_{\epsilon'_n < \|x\| \leq 1} x(p, q) x(p', q') \nu_n(dx \times [0, t]) + \int_{\|x\| \leq 1} x(p, q) x(p', q') \\ & \vee (dx \times (0, t)) \text{ n.W. } \forall p, q, p', q' \\ & \epsilon'_n < \|x\| \leq 1 \int_{\|x\| \leq 1} x(p, q) x(p', q') \vee_n(dx \times [0, t]) + \int_{\|x\| \leq 1} x(p, q) x(p', q') \\ & \vee (dx \times [0, t]) \text{ n.W. } \forall p, q, p', q' \end{aligned}$$

Mit Voraussetzung 1 iii) folgt daraus

$$\begin{aligned} C_n(p, q, p', q')(t) &+ \int_{\|x\| \leq \epsilon'_n} x(p, q) x(p', q') \vee_n(dx \times [0, t]) + \\ &+ C(p, q, p', q')(t) \text{ n.W. } \forall p, q, p', q' \end{aligned}$$

$$\left| C_n(p, q, p', q')(t) - \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} (C_n(p, q, p', q')(T_{n,j+1}) - \right.$$

$$\left. - C_n(p, q, p', q')(T_{n,j})) \right| \leq |C_n(p, q, p', q')(t) -$$

$$- C_n(p, q, p', q')(T_{n, k_n(t)})| \leq \delta_n^2 \text{ nach Definition der } (T_{n,j})_{n,j}; \text{ ebenso}$$

$$\text{ist } \left| \int_{\|x\| \leq \epsilon'_n} x(p, q) x(p', q') \vee_n(dx \times [0, t]) - \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} \int_{\|x\| \leq \epsilon'_n} x(p, q)$$

$$x(p', q') \vee_n(dx \times [T_{n,j}, T_{n,j+1}]) \right| \leq$$

$$\left| \int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} x(p, q) x(p', q') v_n(dx x] T_{n, k_n}(t), t] ) \right| \leq \delta_n + \varepsilon_n^2; \text{ also}$$

$$k_n(t)-1 \sum_{j=0} (C_n(p, q, p', q')(T_{n, j+1}) - C_n(p, q, p', q')(T_{n, j}) +$$

$$+ \int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} x(p, q) x(p', q') v_n(dx x] T_{n, j}, T_{n, j+1}]) +$$

$$(2.26) \quad + C(p, q, p', q')(t) \text{ n.W. } \forall p, q, p', q'$$

Man zeigt nun

$$k_n(t)-1 \sum_{j=0} (C_n(p, q, p', q')(T_{n, j+1}) - C_n(p, q, p', q')(T_{n, j}) +$$

$$+ \int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} x(p, q) x(p', q') \mu_n(dx x] T_{n, j}, T_{n, j+1}]) +$$

$$(2.27) \quad + C(p, q, p', q')(t) \text{ n.W. } \forall p, q, p', q'$$

Dafür hinreichend ist

$$k_n(t)-1 \sum_{j=0} \left( \int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} x(p, q) x(p', q') \mu_n(dx x] T_{n, j}, T_{n, j+1}]) - \right.$$

$$\left. - \int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} x(p, q) x(p', q') v_n(dx x] T_{n, j}, T_{n, j+1}]) \right) \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall p, q, p', q'$$

Da  $E((\dots) | f_{T_{n, j}}) = 0$  ist, ist nach Lemma A. 3 hinreichend dafür:

$$k_n(t)-1 \sum_{j=0} E((\dots)^2 | f_{T_{n, j}}) \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

$$\text{wegen } E((\int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} x(p, q) x(p', q') \mu_n(dx x] T_{n, j}, T_{n, j+1}]))^2 | f_{T_{n, j}}) \leq$$

$$\leq E(\int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} x^2(p, q) x^2(p', q') \mu_n(dx x] T_{n, j}, T_{n, j+1}]) | f_{T_{n, j}}) =$$

$$= E(\int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} x^2(p, q) x^2(p', q') v_n(dx x] T_{n, j}, T_{n, j+1}]) | f_{T_{n, j}}) \text{ ist}$$

$$\text{dann } (E((\dots)^2 | f_{T_{n, j}}) \leq 8 E(\int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} x^2(p, q) x^2(p', q')$$

$$v_n(dx x] T_{n, j}, T_{n, j+1}]) | f_{T_{n, j}}) \leq 8 E_n^2 E(\int_{\|x\| \leq \varepsilon'_n} |x|^2$$

$$v_n(dx x] T_{n, j}, T_{n, j+1}]) | f_{T_{n, j}}) \leq$$

$$\leq 8 \epsilon_n'^2 E \left( \int_{\|x\| \leq \epsilon_n'} \|x\|^2 v_n(dx) \mathbb{1}_{T_{n,j}, T_{n,j+1}} \right) | f_{T_{n,j}} \rangle, \text{ also}$$

$$E \left( \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E \left( (\dots)^2 | f_{T_{n,j}} \right) | f_0 \right) \leq 8 \epsilon_n' E \left( \int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2$$

$$v_n(dx) \mathbb{1}_{T_{n,j+1}, T_{n,j+1}} \right) | f_0 \rangle \leq 8 \epsilon_n'^2 \sum_{p,q} C(p,q,p,q)(t_0') +$$

$$\int_{\|x\| \leq 1} x^2(p,q) v(dx) \mathbb{1}_{[0,t_0']} + 1 + 0$$

Voraussetzung I. 4 iii) ist nachgewiesen, wenn man nun zeigt:

$$\sum_{j=0}^{k_n(t)-1} \left| E \left( X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) \right)^2 | X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) \right| \leq 1$$

$$| f_{T_{n,j}} |^2 + 0 \text{ n.w.}$$

$$(+) \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E \left( X_n(p,q)(T_{n,j+1}) - X_n(p,q)(T_{n,j}) \right) \cdot$$

$$\cdot \left( X_n(p,q)(T_{n,j+1}) - X_n(p,q)(T_{n,j}) \right)^2 | X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) | \leq 1$$

$$| f_{T_{n,n}} \rangle + C(p,q,p',q')(t) + \int_{\|x\| \leq 1} x(p,q) x(p',q') v(dx) \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle$$

$$\text{n.W. } \forall p,q,p',q'$$

Zuerst zu zweiten Behauptung in (+). Dafür hinreichend ist

$$\epsilon_n' + \eta_n' \leq \int_{\|x\| \leq 1} x(p,q) x(p',q') p_n(dx) \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle + \int_{\|x\| \leq 1} x(p,q) x(p',q')$$

$$v(dx) \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle \text{ n.W. } \forall p,q,p',q'$$

$$\sum_{j=0}^{k_n(t)-1} E \left( \left( X_n(p,q)(T_{n,j+1}) - X_n(p,q)(T_{n,j}) \right) \cdot \left( X_n(p',q')(T_{n,j+1}) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - X_n(p',q')(T_{n,j}) \right)^2 | X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) | \leq \epsilon_n' + \eta_n' | f_{T_{n,j}} \right) +$$

$$C(p,q,p',q')(t) \text{ n.W. } \forall p,q,p',q'$$

Der erste Teil dieser Aussage folgt aus (2.25), wenn man zeigt

$$\epsilon_n' + \eta_n' \geq \int_{\|x\| \geq \epsilon_n'} \|x\|^2 p_n(dx) \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle + 0 \text{ n.W. ; in jeder}$$

Teilfolge muß man also eine Teilfolge finden, für die dies f.s. gilt;  
daher gelte o.B. d.A (2.25) f.s. Dann folgt

$$\epsilon'_m < \|x\| \leq 1 \quad \int \|x\|^2 p_n(dx \times [0, t]) + \int \|x\|^2 v(dx \times [0, t]) \text{ f.s. } \forall m \text{ also}$$

$$\overline{\lim}_n \int_{\epsilon'_n + \eta'_n \geq \|x\| > \epsilon'_n} \|x\|^2 p_n(dx \times [0, t]) \leq \overline{\lim}_m \overline{\lim}_n \int_{\epsilon'_m \geq \|x\| > \epsilon'_n} \|x\|^2$$

$$p_n(dx \times [0, t]) \leq \overline{\lim}_m \int_{\|x\| \leq \epsilon'_m} \|x\|^2 v(dx \times [0, t]) = 0 \text{ f.s.}$$

Zum zweiten Teil der Aussage:

Analog zum eben Bewiesenen verläuft der Beweis von

$$\epsilon'_n < \|x\| \leq \epsilon'_n + \eta'_n \quad \int \|x\|^2 v_n(dx \times [0, t]) \rightarrow 0 \text{ n.W., damit ergibt sich aus (2.26)}$$

$$k_n(t) - 1 \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} (C_n(p, q, p', q')(T_{n,j+1}) - C_n(p, q, p', q')(T_{n,j}) +$$

$$+ \int_{\|x\| \leq \epsilon'_n + \eta'_n} x(p, q) x(p', q') v_n(dx \times [T_{n,j}, T_{n,j+1}]) \rightarrow$$

$$+ C(p, q, p', q')(t) \text{ n.W. } \forall p, q, p', q'$$

Indem man den Beweis von (2.27) übernimmt, läßt sich damit zeigen

$$k_n(t) - 1 \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} (C_n(p, q, p', q')(T_{n,j+1}) - C_n(p, q, p', q')(T_{n,j}) +$$

$$+ \int_{\|x\| \leq \epsilon'_n + \eta'_n} x(p, q) x(p', q') \mu_n(dx \times [T_{n,j}, T_{n,j+1}])) \rightarrow$$

$$+ C(p, q, p', q')(t) \text{ n.W. } \forall p, q, p', q'$$

Danach folgt aber mit (\*) (und weil

$$\|x_n(t) - x_n(T_{nkn}(t))\|^2 \leq \|x_n(t) - x_n(T_{nk}(t))\| \leq \epsilon'_n + \eta'_n \rightarrow 0 :$$

$$k_n(t) - 1 \sum_{j=0}^{k_n(t)-1} (x_n(p, q)(T_{n,j+1}) - x_n(p, q)(T_{n,j})) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (X_n(p, q)(T_{n, j+1}) - X_n(p', q')(T_{n, j}))^2 \cdot 1_{\|X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j})\| \leq \epsilon'_n + \eta'_n} \\ & \rightarrow C(p, q, p', q')(t) \quad \text{n.W.} \quad \forall p, q, p', q' \end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} & k_{n \sum}^{(t)-1} (X_n(p, q)(T_{n, j+1}) - X_n(p, q)(T_{n, j}))^2 \cdot (X_n(p', q')(T_{n, j+1}) - \\ & - X_n(p', q')(T_{n, j}))^2 \cdot 1_{\|X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j})\| \leq \epsilon'_n + \eta'_n} \leq (\eta'_n + \epsilon'_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k_{n \sum}^{(t)-1} (X_n(p, q)(T_{n, j+1}) - X_n(p, q)(T_{n, j}))^2 \cdot 1_{\|X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j})\| \leq \epsilon'_n + \eta'_n} \\ & \rightarrow 0 \text{ n.W.} \quad \forall p, q, p', q', \end{aligned}$$

also mit Folgerung A.4 zum Lemma A.3

ergibt sich damit der zweite Teil der obigen Behauptung und damit der zweite Teil von (+).

Man zeigt nun den ersten Teil von (+):

$$k_{n \sum}^{(t)-1} \mathbb{E} (X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j}))^2 \cdot 1_{\|X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j})\| \leq 1} \cdot |f_{T_{n, j}}|^2 \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} (X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j}))^2 \cdot 1_{\|X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j})\| \leq 1} \cdot |f_{T_{n, j}}| \leq \\ & \leq \epsilon + \mathbb{E} ( \|X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j})\| \cdot 1_{\epsilon < \|X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j})\| \leq 1} \cdot |f_{T_{n, j}}| ) = \\ & = \epsilon + \int |x| \cdot 1_{\epsilon < |x| \leq 1} p_{n, j}(dx) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \epsilon + \max \{ p_{n, j} (|x| > \epsilon) \mid j=0, \dots, k_n(t_0) \}$$

Da  $\epsilon$  beliebig klein ist, folgt mit Voraussetzung I. 4i)

$$\begin{aligned} & \max \{ \mathbb{E} (X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j}))^2 \cdot 1_{\|X_n(T_{n, j+1}) - X_n(T_{n, j})\| \leq 1} \cdot |f_{T_{n, j}}| \mid \\ & \mid j=0, \dots, k_n(t_0) \} \rightarrow 0 \text{ n.W.} \end{aligned}$$

damit bleibt zu zeigen:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_0)-1} \mathbb{E} (X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}))^2 \mathbb{1}_{\{X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) \leq 1\}} \right) \leq 1$$

$$|f_{T_{n,j}}| > R) = 0$$

unter Berücksichtigung von (2.22) und (2.24):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=0}^{k_n(t_0)-1} \mathbb{E} (B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j}))^2 \mathbb{1}_{\{B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j}) \leq 1\}} \right) > R) = 0$$

Nach (2.23) ist aber

$$\sum_{j=0}^{k_n(t_0)-1} \mathbb{E} (B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j}))^2 \leq \int_0^{t_0} |dB_n(s)| \leq \phi(t_0) + 1 + 2 (\nu(\{|X| > q_0\} \times [0, t_0]) + 1),$$

damit gilt die Behauptung (+) und 1.4iiii)

Zu Voraussetzung I.5:

Man argumentiert wie eben:

$$\sum_{j=k_n(s)}^{k_n(t)-1} \mathbb{E} (X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}))^2 \mathbb{1}_{\{X_n(T_{n,j+1}) - X_n(T_{n,j}) \leq 1\}} |f_{T_{n,j}}| \sim n^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

$$\sum_{j=k_n(s)}^{k_n(t)-1} \mathbb{E} (B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j}))^2 |f_{T_{n,j}}| \sim n^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.24)$$

$$\sum_{j=k_n(s)}^{k_n(t)-1} \mathbb{E} (B_n(T_{n,j+1}) - B_n(T_{n,j}))^2 \leq \int_s^t |dB_n(u)| \leq \phi(t) - \phi(s). \quad (2.25)$$

$$\int_s^t |dB_n(u)| + 2 \nu_n(\{|X| > q_0\} \times [s, t]) \leq \phi(t) - \phi(s)$$

mit  $\tilde{\phi}(t) := \phi(t) + 2 \nu_n(\{|X| > q_0\} \times [0, t])$

Nebenrechnung: gegeben  $X_n, X_n \geq 0$  mit  $P(X_n > x + \epsilon) \rightarrow 0 \forall \epsilon > 0$

Sei  $(\epsilon_m)$  monotone Nullfolge,  $\bigwedge_{\epsilon_m} \bigvee_{n(m)} P(X_{n(m)} > x + \epsilon_m) < 2^{-m}$

mit Borel - Cantelli folgt daraus

$$P(\overline{\lim}_m X_{n(m)} \leq x) = 1$$

$D_1^{+2} := \{(s, t) \in D_1^2 \mid s < t\}$  ist abzählbar. Mit der obigen Ungleichung

(und der Nebenrechnung) läßt sich eine Diagonalfolge konstruieren,

für die die Voraussetzung I.5 auf  $D_1^{+2}$  erfüllt ist. Man nimmt diese

Diagonalfolge  $(n')$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  mit  $t_1 < t_2$  und  $s_1, s_2 \in D_1^{+2}$  mit

$s_1 \leq t_1 < t_2 \leq s_2$ , mit der Stetigkeit von  $\tilde{\phi}$  ergibt sich dann:

$$\lim_{n'} \frac{k_n(t_2) - 1}{j=k_n(t_1)} |E(X_{n', (T_{n'}, j+1)} - X_{n', (T_{n'}, j)})|$$

$$1 \|X_{n', (T_{n'}, j+1)} - X_{n', (T_{n'}, j)}\| \leq 1 \quad |f_{T_{n'}, j}| \leq \frac{k_n(s_2) - 1}{j=k_n(s_1)}$$

$$|E(X_{n', (T_{n'}, j+1)} - X_{n', (T_{n'}, j)})| \|X_{n', (T_{n'}, j+1)} - X_{n', (T_{n'}, j)}\| \leq 1 \quad |f_{T_{n'}, j}| \leq$$

$$\leq \tilde{\phi}(s_2) - \tilde{\phi}(s_1) + \tilde{\phi}(t_2) - \tilde{\phi}(t_1) \quad \text{f.s.}$$

damit ist Voraussetzung I.5 nachgewiesen.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz I. 13 erfüllt und es folgt:

$(Y_{no}, \Delta_{X_n}, \Delta_{Y_n}) \rightarrow (Y_o, X, Y)$  und  $Y$  ist verteilt wie die Lösung von

$$Z(t) = Y_o + \int_{0,t} h_o(s, X(s-), Z(s-)) dX(s).$$

Nach dem ersten Teil von (\*\*) gilt:

$$P(\sup_{t \leq t_o} |X_n(t) - \Delta_{X_n}(t)| + \sup_{t \leq t_o} |Y_n(t) - \Delta_{Y_n}(t)| \geq \delta_n) \leq$$

$$\leq P(\sup_{t \leq t_o} |\hat{Y}_n(t) - \tilde{Y}_n(t)| \geq \delta_n) \leq \delta_n + 0, \text{ damit:}$$

$$(Y_{no}, X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (Y_o, X, Y)$$

Wenn man den Prozeß  $X_n$  "zentriert", kann man eine der Folgerung

I.10 entsprechende Aussage herleiten:

### 11. Folgerung

Sind die Voraussetzungen 1i), ii), 3) und 4) erfüllt so gilt

a)  $(Y_{no}, X_n, Y_n) \rightarrow (Y_o, X, Y)$  wo

$$z^X = X - \tilde{B}, \quad z^X_n = X_n - \tilde{B}_n \quad \text{und} \quad Y, Y_n \text{ die}$$

zu  $z_n^X$  bzw.  $z_n^{X_n}$  gehörender Lösungen der Integralgleichung (J) sind

b) für die lokalen Charakteristiken  $(z_n^{\tilde{B}}, z_n^C, z_n^v)$  gilt:

$$z_n^C(t) = C_n(t); \int_0^t \|d_z \tilde{B}_n(s)\| \rightarrow \text{On.W.};$$

$$\left| \int f(p,q)(X) f(p',q')(X) v_n(dXx [0,t]) - \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n(p,q)(s) \Delta \tilde{B}_n(p',q')(s) - \int f(p,q)(X) f(p',q')(X) z_n^v(dXx [0,t]) - \sum_{s \leq t} \Delta z_n^{\tilde{B}}(p,q)(s) \Delta z_n^{\tilde{B}}(p',q')(s) \right| \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

$\left| \int g(X) v_n(dXx [0,t]) - \int g(X) z_n^v(dXx [0,t]) \right| \rightarrow 0$  n.W. für jede stetige Funktion  $g$ , die in einer Umgebung der Null verschwindet und einen Grenzwert im Unendlichen hat.

#### Beweis

a) Aus  $\int_0^t \|d_z \tilde{B}_n(s)\| \rightarrow 0$  n.W. folgt, daß Voraussetzungen 1 iv) und 2) erfüllt sind für den Prpzeß  $z_n^X$ .

Die anderen Aussagen von b) liefern gerade Voraussetzung 1 i) ii) und iii) für  $z_n^X$  und damit folgt die Behauptung aus Satz 10. Man muß also nur die Aussage b) beweisen. Den

Beweis überträgt man aus dem Beweis von [22], Théorème (2.21).

$\Delta z_n^X(s) = \Delta X_n(s) - \Delta \tilde{B}_n(s)$ , daraus folgt für jede beschränkte Funktion auf  $M^M$ , die durch Konstante  $\cdot \|X\|^2$  in einer Umgebung der Null beschränkt ist (insbesondere für die in b) betrachtete Funktionenklasse)

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{aligned} g(\Delta z_n^X(s)) &= g(\Delta X_n(s) - \Delta \tilde{B}_n(s)) 1_{\Delta X_n(s) \neq 0} + g(-\Delta \tilde{B}_n(s)) (1 - 1_{\Delta X_n(s) \neq 0}) \\ \sum_{s \leq t} g(\Delta z_n^X(s)) &= \sum_{s \leq t} g(\Delta X_n(s) - \Delta \tilde{B}_n(s)) 1_{\Delta X_n(s) \neq 0} + \\ &+ \sum_{s \leq t} g(-\Delta \tilde{B}_n(s)) (1 - 1_{\Delta X_n(s) \neq 0}) \end{aligned} \right.$$

Die zugehörigen vorhersagbaren dualen Projektionen sind

$$\begin{aligned} \int g(x) z_n^v(dXx\{s\}) &= \int g(X - \Delta \tilde{B}_n(s)) v_n(dXx\{s\}) + g(-\Delta \tilde{B}_n(s)) (1 - v_n(M^M_x\{s\})) \\ \int g(X) z_n^v(dXx [0,t]) &= \int_0^t \int g(X - \Delta \tilde{B}_n(s)) v_n(dXx ds) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \int_{s \leq t} g(-\Delta \tilde{B}_n(s)) (1 - v_n(M^M_x(s))) \\
 & \left| \int g(X) {}_Z v_n(dX) [0, t] - \int g(X) v_n(dX) [0, t] \right| \leq \\
 & \int_s^t \int |g(X - \Delta \tilde{B}_n(s)) - g(X)| v_n(dX) ds + \\
 & + \int_{s \leq t} |g(-\Delta \tilde{B}_n(s))| (1 - v_n(M^M_x(s)))
 \end{aligned}$$

Sei  $g(X) = 0$  für  $\|X\| \leq 2\delta$ ; da  $g$  gleichmäßig stetig ist (da  $\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} g(X)$  existiert), sei der Stetigkeitsmodul  $\eta(\theta)$ :

$$\|X - X'\| \leq \eta(\theta) \Rightarrow \|g(X) - g(X')\| \leq \theta.$$

Damit gilt:  $\sup \|\Delta \tilde{B}_n(s)\| \leq \eta(\theta) \quad \delta \Rightarrow$

$g(-\Delta \tilde{B}_n(s)) = 0$  und

$$|g(X - \Delta \tilde{B}_n(s)) - g(X)| \leq \theta \cdot 1_{\|X\| > \delta} \quad \forall s, X$$

Aus li) folgt aber  $\sup_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n(s)\| \rightarrow 0$  n.W.

und aus lii) folgt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(v_n(\{\|X\| > \delta\} \times [0, t]) > R) = 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 & P(|\int g(X) {}_Z v_n(dX) [0, t] - \int g(X) v_n(dX) [0, t]| > \epsilon) \leq \\
 & \leq P(\sup_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n(s)\| > \eta(\theta) \wedge \delta) +
 \end{aligned}$$

+  $P(\theta v_n(\{\|X\| > \delta\} \times [0, t]) > \epsilon)$  daraus folgt aber nun die letzte Aussage von b).

${}_Z C_n(t) = C_n(t)$ , da der Anteil  $X_n^C$  eindeutig bestimmt ist und durch Subtraktion eines Prozesses wie  $\tilde{B}_n$  nicht verändert wird. Für das Semimartingal  $X$  setzt man

$$\tilde{X}^e(t) := \int (X - f(X)) {}_Z v(dX) [0, t] = \int_{s \leq t} (\Delta X(s) - f(\Delta X(s))) 1_{\Delta X(s) \neq 0}$$

(2.30)

$$\tilde{X}^d(t) := \int (X 1_{\|X\| \leq \frac{1}{2}} + f(X) 1_{\|X\| > \frac{1}{2}}) (\mu - \nu)(dX) [0, t]$$

und erhält mit (2.4) die eindeutige Zerlegung

$$(2.31) \quad X(t) - \tilde{X}^e(t) = X^C(t) + \tilde{X}^d(t) + \tilde{B}(t)$$

Nach (2.30) ist  $\Delta \tilde{X}_n^e(t) = \Delta X_n(t) - f(\Delta X_n(t))$ , setzt man nun  $g(X) = X - f(X)$ ,

so wird  $\Delta_z X_n(t) - f(\Delta_z X_n(t)) =$

$$= \Delta X_n(t) - \Delta \tilde{B}_n(t) - f(\Delta X_n(t) - \Delta \tilde{B}_n(t)) =$$

$$= \Delta \tilde{X}_n^e(t) + f(\Delta X_n(t)) - \Delta \tilde{B}_n(t) - f(\Delta X_n(t) - \Delta \tilde{B}_n(t)) =$$

$$= \Delta \tilde{X}_n^e(t) - \Delta F_n(t) \text{ mit (wegen } f(0)=0)$$

$$F_n(t) := \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n(s) + f(\Delta \tilde{B}_n(s)) (1 - 1_{\Delta X_n(s) \neq 0}) -$$

$$- \sum_{s \leq t} f(\Delta X_n(s)) - \Delta \tilde{B}_n(s) - f(\Delta X_n(s) - \Delta \tilde{B}_n(s)) 1_{\Delta X_n(s) \neq 0}$$

$$\Rightarrow \tilde{X}_n^e(t) = \tilde{X}_n^e(t) - F_n(t) \Rightarrow$$

$$X_n^C(t) + \tilde{X}_n^d(t) = X_n(t) - \tilde{X}_n^e(t) - \tilde{B}_n(t) =$$

$$= \tilde{X}_n^e(t) - \tilde{X}_n^e(t) - F_n(t) \text{ ist ein lokales Martingal.}$$

Da die vorhersagbare duale Projektion eines lokalen Martingales

verschwindet, müssen die von  $F_n$  und  $\tilde{X}_n - \tilde{X}_n^e$  übereinstimmen.

Andererseits ist nach (2.31)

$$\tilde{X}_n(t) - \tilde{X}_n^e(t) - \tilde{B}_n(t) = X_n^C(t) + \tilde{X}_n^d(t) \text{ wieder ein lokales Martin-}$$

gal, damit muß also  $\tilde{B}_n$  die vorhersagbare duale Projektion von  $F_n$  sein,

$$\tilde{B}_n(t) = \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n(s) + f(\Delta \tilde{B}_n(s)) (1 - v_n(M^M X(s))) -$$

$$- f \int_0^t f(X) - \Delta \tilde{B}_n(s) - f(X - \Delta \tilde{B}_n(s)) v_n(dX ds)$$

$$\text{Es ist bekanntlich } f(X) \begin{cases} = X & \|X\| \leq \frac{1}{2} \\ = 0 & \|X\| \geq 0 \end{cases}, \text{ stetig mit}$$

$$\|f(X)\| \leq 1 \text{ sonst;}$$

sei  $\eta(\theta)$  der Stetigkeitsmodul von  $f$ :

$$\|X - X'\| \leq \eta(\theta) \Rightarrow \|f(X) - f(X')\| \leq \theta; \text{ damit gilt}$$

$$\sup_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n(s)\| \leq \frac{1}{4} \wedge \theta \wedge \eta(\theta) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{z}_{\tilde{B}_n}(t) - \tilde{z}_{\tilde{B}_n}(s) \right| \leq 2 \theta v_n(\{ \|X\| \geq \frac{1}{4} \} + s, t) \Rightarrow \\ & \int_0^t \left| d_{\tilde{z}_{\tilde{B}_n}}(s) \right| \leq 2 \theta v_n(\{ \|X\| \geq \frac{1}{4} \} \times [0, t]) \text{ also:} \\ & P\left(\int_0^t \left| d_{\tilde{z}_{\tilde{B}_n}}(s) \right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\sup_{s \leq t} \left| \Delta \tilde{B}_n(s) \right| > \frac{1}{4} \wedge \theta \wedge \eta(\theta)\right) + \\ & + P\left(2 \theta v_n(\{ \|X\| \geq \frac{1}{4} \} \times [0, t]) > \varepsilon\right) \end{aligned}$$

$$\text{also } \int_0^t \left| d_{\tilde{z}_{\tilde{B}_n}}(s) \right| \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

$$\text{Aus } \int_0^t \left| d_{\tilde{z}_{\tilde{B}_n}}(s) \right| \rightarrow 0 \text{ n.W. folgt}$$

$$\sum_{s \leq t} \left\| \Delta_{\tilde{z}_{\tilde{B}_n}}(s) \right\|^2 \rightarrow 0 \text{ n.W. also mu\ss noch}$$

$$\begin{aligned} (2.32) \quad & \left| \int f(p, q)(x) f(p', q')(x) v_n(dx \times [0, t]) - \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s) - \right. \\ & \left. - \int f(p, q)(x) f(p', q')(x)_{\tilde{z}_{\tilde{B}_n}}(dx \times [0, t]) \right| \rightarrow 0 \text{ n.W.} \end{aligned}$$

gezeigt werden. Mit (2.29) wird

$$\begin{aligned} & \int f(p, q)(x) f(p', q')(x) v_n(dx \times [0, t]) - \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s) - \\ & - \int f(p, q)(x) f(p', q')(x)_{\tilde{z}_{\tilde{B}_n}}(dx \times [0, t]) = \\ & = \int \int (f(p, q) f(p', q'))(x) - (f(p, q) f(p', q'))(x - \Delta \tilde{B}_n(s)) v_n(dx \times ds) \\ & - \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s) - \sum_{s \leq t} (f(p, q) f(p', q'))(-\Delta \tilde{B}_n(s)) (1 - v_n(|M^M x\{s\})) \\ & = \sum_{s \leq t} \left( \int (f(p, q) f(p', q'))(x) - (f(p, q) f(p', q'))(x - \Delta \tilde{B}_n(s)) v_n(dx \times \{s\}) \right. \\ & - \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s) - (f(p, q) f(p', q'))(-\Delta \tilde{B}_n(s)) (1 - v_n(|M^M x\{s\})) \\ & = \sum_{s \leq t} \left( \int h(p, q, p', q')(x, \Delta \tilde{B}_n(s)) v_n(dx \times \{s\}) - (f(p, q) f(p', q'))(-\Delta \tilde{B}_n(s)) \right. \\ & + \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s) + \\ & + ((f(p, q) f(p', q'))(-\Delta \tilde{B}_n(s)) - \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s)) v_n(|M^M x\{s\})) \end{aligned}$$

$$\text{mit } h(p, q, p', q')(x, y) = (f(p, q) f(p', q'))(x) -$$

$$\begin{aligned} & - (f(p, q) f(p', q'))(x - y) + y(p, q) y(p', q') - y(p, q) f(p', q')(x) - \\ & - y(p', q') f(p, q)(x) \quad (\text{denn wegen (2.6) ist } \int \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s) \\ & - \Delta \tilde{B}_n(p, q) f(p', q')(x) - \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s) f(p, q)(x) v_n(dx \times \{s\}) = \\ & = - \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \cdot \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s) \cdot v_n(|M^M x\{s\}) - 2 \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \cdot \Delta \tilde{B}_n(p', q') \end{aligned}$$

Für  $\|x\| \leq \frac{1}{4}$ ,  $\|y\| \leq \frac{1}{4}$  ist  $f(x) = x$ ,  $h(x, y) = 0$ ;

außerdem gibt es ein  $\eta(\theta)$ , so daß

$$\|y\| \leq \eta(\theta) \Rightarrow |h(p, q, p', q')(x, y)| \leq \theta \quad \forall x.$$

Also folgt damit:  $\sup_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n(s)\| \leq \frac{1}{4} \wedge \eta(\theta) \Rightarrow$

$$\left| \int f(p, q)(x) f(p', q')(x) v_n(dx) [0, t] \right| \leq \int_0^t \Delta \tilde{B}_n(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n(p', q')(s) -$$

$$- \int f(p, q)(x) f(p', q')(x) v_n(dx) [0, t] \quad \left| \leq \right.$$

$$\leq \theta \cdot v_n(\{ \|x\| > \frac{1}{4} \} \times [0, t]), \text{ wegen } \sup_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n(s)\| \Rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

und iii) folgt damit (2.32); insgesamt ist damit die Folgerung bewiesen.

## 12. Bemerkung

Sei im Unterschied zu Folgerung 11 folgendes vorausgesetzt

$$i) \quad \sup_{s \leq t} v_n(\{ \|x\| > \epsilon \} \times \{s\}) \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall \epsilon > 0, t \in D_1$$

$$ii) \quad \int_0^t \|d_z \tilde{B}_n(s)\| \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t \in D_1$$

iii) Voraussetzung lii) mit  $v_n$  an Stelle von  $v_n$

iv) Voraussetzung liii) mit  $z_n^C, v_n$  an Stelle von  $C_n$  und  $v_n$

dann gelten dennoch die Aussagen von Folgerung 11 b)

## Beweis

$$z_n^C \equiv C_n \text{ ist klar, da } x_n = z_n^x + \tilde{B}_n, \text{ also } x_n^C = z_n^x.$$

Die zweite Aussage von 11 b) ist Voraussetzung ii)

zur vierten Aussage:

$$\Delta x_n \equiv \Delta z_n^x + \Delta \tilde{B}_n, \text{ also}$$

$$g(\Delta x_n(s)) = g(\Delta z_n^x(s) + \Delta \tilde{B}_n(s)) \cdot 1_{\Delta z_n^x(s) \neq 0} + g(\Delta \tilde{B}_n(s)) \cdot (1 - 1_{\Delta z_n^x(s) \neq 0})$$

Analog zum obigen Beweis ergibt sich daraus

$$P\left(\left|\int g(x) v_n(dx) [0, t] - \int g(x) v_n(dx) [0, t]\right| > \epsilon\right)$$

$$\leq P\left(\sup_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n(s)\| > \eta(\theta) + \delta\right) +$$

+  $P(\Theta_{z_n}(\{\|X\| > \delta\} \times (0,t)))$  und damit diese Aussage.

Zur dritten Aussage:

da wie eben bewiesen die Voraussetzung 1ii) erfüllt ist, kann man den Beweis in 11 b) direkt übernehmen.

Damit ist man nun in der Lage, im Fall unabhängiger Zuwächse eine teilweise Umkehrung von Folgerung 11 a) zu formulieren.

### 13. Folgerung

Sind  $X_n, X$  Semimartingale mit unabhängigen Zuwächsen und die Voraussetzungen 1i) 3) und 4) erfüllt, dann gilt:

$$(Y_{no}, z_{X_n}^X, z_{Y_n}^Y) \rightarrow (Y_o, z_X^X, z_Y^Y) \text{ und} \\ \int_0^t \|d_z \tilde{B}_n(s)\| \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t \in D_1 \text{ genau dann,}$$

wenn die Voraussetzungen 1ii) und 1iii) erfüllt sind

#### Beweis

$\Rightarrow$  : Folgerung 11

$$\Rightarrow : (Y_{no}, z_{X_n}^X, z_{Y_n}^Y) \xrightarrow{D} (Y_o, z_X^X, z_Y^Y)$$

$$\Rightarrow z_{X_n}^X \xrightarrow{D} z_X^X$$

Nach [25], Théorème (1.21) folgt daraus, daß die Voraussetzung iii) und iv) in Bemerkung 12) erfüllt sind. Nach dieser Bemerkung und Folgerung 11 b) sind dann die Voraussetzungen 1ii) und 1iii) erfüllt.

Zur Veranschaulichung soll hier ein einfaches Beispiel dienen.

Dazu seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Prozesse mit homogenen, unabhängigen Zuwächsen, 0 in 0. Nach (11), Corollaire (3.57) haben die lokalen Charakteristiken die Form

$$\tilde{B}(t) = t \cdot \tilde{B}, \tilde{B}_n(t) = t \cdot \tilde{B}_n,$$

$$C(t) = t \cdot C, C_n(t) = t \cdot C_n,$$

$$\int (dX \times dt) = F(dX) \cdot dt, \int (dX_n \times dt) = F_n(dX) \cdot dt$$

wobei:  $\tilde{B}, \tilde{B}_n \in \mathcal{M}^M$ ;  $C, C_n$  nichtnegative, symmetrische Operatoren auf  $\mathcal{M}^M$ ;

$F, F_n$  positive Maße auf  $(M^M, \mathcal{B}_M^M)$  mit

$$F(\{0\}) = 0, \int \min(1, \|x\|^2) F_n(dx) < \infty.$$

Andererseits : sind  $\tilde{B}, \tilde{B}_n, C, C_n, F, F_n$  von dieser Form gegeben, dann existieren zugehörige Prozesse  $X, X_n$  mit unabhängigen, homogenen

Zuwächsen (nach (11), Corollaire (2.81) sind dies immer Semimartingale)

Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Skalarprodukt in  $M^M$  und  $I_{pq}$  Basisvektoren der Orthogonalbasis.

#### 14. Folgerung

$Y_{n,0}, Y_0$  Zufallsvariable mit  $Y_{n,0} \perp Y_0$ ; Voraussetzung 3 erfüllt,

es gibt genau dann Prozesse  $X_n, X$ , unabhängig von  $Y_{n,0}, Y_0$ , mit

unabhängigen, homogenen Zuwächsen,  $X_n(0) = X(0) = 0$ , und

zugehörige Lösungen  $Y_n, Y$  von (J) mit  $(Y_{n,0}, X_n, Y_n) \perp (Y_0, X, Y)$ ,

wenn es  $\tilde{B}, \tilde{B}_n, C, C_n, F, F_n$  von der oben beschriebenen Form

gibt mit

i)  $\tilde{B}_n \rightarrow \tilde{B}$ ,

ii)  $F_n|_{\|x\|>\varepsilon} \rightarrow F|_{\|x\|>\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$  mit  $F(\partial\{\|x\|\leq\varepsilon\}) = 0$ ,

iii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} ( \langle C_n, y, y \rangle + \int_{\|x\|\leq\varepsilon} \langle y, x \rangle^2 dF_n(x) ) = \langle Cy, y \rangle \quad \forall y$

#### Beweis

$\Rightarrow$  :  $X_n(1) \perp X(1)$ ;  $X_n(1)$  und  $X(1)$  sind unendlich teilbar mit

den Parametern  $(\tilde{B}_n, C_n, F_n)$  bzw.  $(\tilde{B}, C, F)$ ; mit (20), Théorème VI 5.5

folgt die Behauptung

$\Leftarrow$  : man kann natürlich die Prozesse  $X_n, X$  und  $Y_n, Y$  unabhängig von  $Y_{n,0}, Y_0$  konstruieren, somit sind dann Voraussetzung 3 und 4

erfüllt.  $\tilde{B}(t) = \tilde{B} \cdot t$  und  $\tilde{B}_n(t) = \tilde{B}_n \cdot t \Rightarrow$  Voraussetzung liv)

und 2) erfüllt.

$v_n(\{ \|x\| > \varepsilon \} \cap \{s\}) = 0$  da  $\int_{\{s\}} dt = 0$ , also

Voraussetzung li) erfüllt; da  $dv_n = dF_n$  ist, folgt Voraussetzung lii) sofort aus ii).

Zu Voraussetzung liii):

sei wieder oBdA  $F(\partial\{\|x\| \leq 1\}) = 0$ .

Wähle eine Nullfolge  $(\varepsilon_m)_m$  mit  $F(\partial\{\|x\| \leq \varepsilon_m\}) = 0 \forall m$ .

$$\varepsilon_m \int_{\|x\| \leq 1} \langle y, x \rangle^2 dF_n(x) + \int_{\varepsilon_m < \|x\| \leq 1} \langle y, x \rangle^2 dF(x) \quad \forall m;$$

$$\lim_n \left| \langle C_n y, y \rangle + \int_{\|x\| \leq 1} \langle y, x \rangle^2 dF_n(x) - \langle Cy, y \rangle - \int_{\|x\| \leq 1} \langle y, x \rangle^2 dF(x) \right| \leq$$

$$\leq \lim_n \left| \langle C_n y, y \rangle + \int_{\|x\| \leq \varepsilon_m} \langle y, x \rangle^2 dF_n(x) - \langle Cy, y \rangle \right| +$$

$$+ \lim_n \left| \int_{\varepsilon_m < \|x\| \leq 1} \langle y, x \rangle^2 dF_n(x) - \int_{\varepsilon_m < \|x\| \leq 1} \langle y, x \rangle^2 dF(x) \right| +$$

$$+ \int_{\|x\| \leq \varepsilon_m} \langle y, x \rangle^2 dF(x) = 0(\varepsilon_m) \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty \quad \text{also}$$

$$\langle C_n y, y \rangle + \int_{\|x\| \leq 1} \langle y, x \rangle^2 dF_n(x) \rightarrow \langle Cy, y \rangle + \int_{\|x\| \leq 1} \langle y, x \rangle^2 dF(x)$$

Die Funktion  $f$  war stetig mit  $f(x) = x$  für  $\|x\| \leq \frac{1}{2}$ ,  $f(x) = 0$

für  $\|x\| \geq 1$  und  $\|f(x)\| \leq 1 \forall x$ , damit ist

$$\langle y, f(x) \rangle^2 = \langle y, x \rangle^2 \mathbf{1}_{\|x\| \leq 1} + (\langle y, f(x) \rangle^2 - \langle y, x \rangle^2) \mathbf{1}_{\frac{1}{2} < \|x\| \leq 1}$$

Da  $(\langle y, f(x) \rangle^2 - \langle y, x \rangle^2) \mathbf{1}_{\frac{1}{2} < \|x\| \leq 1}$  nur auf  $\|x\| = 1$  unstetig ist und

$$F(\|x\| = 1) = 0, \text{ folgt damit } \langle C_n y, y \rangle + \int \langle y, f(x) \rangle^2 dF_n(x) \rightarrow \langle Cy, y \rangle + \int \langle y, f(x) \rangle^2 dF(x)$$

$$C_n(p, q, p', q') = \frac{1}{4} \langle C_n(I_{p, q} + I_{p', q'}), I_{p, q} + I_{p', q'} \rangle -$$

$$- \langle C_n(I_{pq} - I_{p', q'}), I_{pq} - I_{p', q'} \rangle \quad \text{und}$$

$$f(p, q)(x) f(p', q')(x) = \frac{1}{4} \langle I_{pq} + I_{p', q'}, f(x) \rangle^2 -$$

$$- \langle I_{pq} - I_{p', q'}, f(x) \rangle^2$$

damit ergibt sich nun Voraussetzung 1 iii).

## KAPITEL 3

### BEISPIELE

#### § 1 STOCHASTISCHE HEMIGRUPPEN

(vgl. [46], [47])

Sei  $B$  ein separabler Hilbertraum,  $L(B)$  der Raum der linearen, beschränkten Abbildungen von  $B$  in  $B$  mit der üblichen Norm.

$$\mathbb{R}_+^2 := \{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \}.$$

$(U(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2} \subseteq L(B)$  heißt eine Operator-Hemigruppe, falls

$$i) \quad U(s, t) U(t, r) = U(s, r) \quad \forall s \leq t \leq r$$

$$(3.1) \quad ii) \quad U(s, s) = I \quad \forall s$$

iii) die Hemigruppe heißt stetig, falls  $(s, t) \mapsto U(s, t)$  stetig ist (bzgl. der starken Topologie)

Eine stochastische Hemigruppe ist eine "pfadweise" Operator-Hemigruppe.

#### 1.1 Definition

Eine Familie  $(Y(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2}$  von Zufallsvariablen in  $L(B)$  heißt eine

stochastische Hemigruppe, falls

$$i) \quad Y(s, t) Y(t, r) = Y(s, r) \quad \forall s \leq t \leq r \quad \text{f.s.}$$

$$ii) \quad Y(s, s) = I \quad \forall s \quad \text{f.s.}$$

iii)  $(Y(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2}$  heißt (stark) stetig, falls die Abbildung

$(s, t) \mapsto Y(s, t)$  stetig n.W. in der (starken) Norm-Topologie auf  $\mathbb{R}_+^2$  ist.



Man verlangt nicht, daß  $Y(s,t)$  auf disjunkten Intervallen unabhängig sind.

Nach [27], Theorem 9 gilt: Ist die Operator-Hemigruppe  $(U(s,t), (s,t) \in \mathbb{R}_+^2)$  von beschränkter Variation, d.h.

$$\sup_{i=1}^n \{ \mathbb{E} \|U(s_{i-1}, s_i) - I\| \mid 0 \leq s_0 < \dots < s_n \leq t, n \in \mathbb{N} \} < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

dann gibt es eine stark integrierbare Funktion  $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow L(B)$  und ein Borelmaß  $\lambda$ , so daß  $U(s,t)x - x = \int U(s, \cdot) b(\cdot) x d\lambda$ , es gilt auch die Umkehrung.

Im Fall stochastischer Hemigruppen bedeutet die beschränkte Variation, daß man bzgl.  $dY$  ein stochastisches Integral bilden kann, d.h. es muß ein  $\Pi^*$ -Prozeß sein (siehe [26]; im Endlichdimensionalen ein Semimartingal).

Man zeigt nun, daß man stochastische Hemigruppen als Lösung linearer, stochastischer Differentialgleichungen erhält. Sie  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  eine vollständige, rechtsstetige, stochastische Basis und  $X$  ein  $\Pi^*$ -Prozeß mit Werten in  $L(B)$ .

Ist  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow L(B)$  cadlag, dann definiert man

$$a(f, \omega, t) := \hat{P}(f(t-)), \text{ wobei für } U \in L(B)$$

$\hat{P}(U)(V) = U \circ V \quad \forall V \in L(B)$ ; nach [26], Theorem 7.2 läßt sich dann

$$U_s(t) = I + \int_{[s,t]} a(U_s, \tau) dX(\tau) \text{ eindeutig lösen, dies ist aber gleich}$$

$$(J) \quad Y(s,t) = I + \int_{[s,t]} Y(s, \tau-) dX(\tau), \quad t \geq s$$

d.h.  $Y(s,t)$  ist ein eindeutig bestimmter  $\Pi^*$ -Prozeß auf  $[s, \infty[$  für alle  $s \geq 0$ . Insbesondere ist  $Y(s,s) = I \quad \forall s \in \mathbb{R}_+$ .

$$\text{für } t, s, \text{ fest definiert man } Y'(s, \tau) := \begin{cases} Y(s, \tau), & s \leq \tau \leq t \\ Y(s, t) - Y(t, \tau), & t \leq \tau \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{für } r \leq t : Y'(s, r) &= Y(s, r) = I + \int_{[s,r]} Y(s, \tau-) dX(\tau) = \\ &= I + \int_{[s,r]} Y'(s, \tau-) dX(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{für } t \leq r: I + \int_{]s,r]} Y'(s, \tau-) dX(\tau) &= I + \int_{]s,r]} Y'(s, \tau-) dX(\tau) + \int_{]s,r]} Y'(s, \tau-) dX(\tau) \\
 &= I + \int_{]s,r]} Y(s, \tau-) dX(\tau) + \int_{]t,r]} Y(s, t) Y(t, \tau-) dX(\tau) = \\
 &= Y(s, t) + Y(s, t) \int_{]t,r]} Y(t, \tau-) dX(\tau) = Y(s, t) Y(t, r) = Y'(s, r)
 \end{aligned}$$

Damit ist  $Y'(s, r)$  ebenfalls Lösung von (J), also

$$Y'(s, r) = Y(s, r) = Y(s, t) \cdot Y(t, r).$$

Aus dieser Gleichung folgt auch (mit  $s = 0$ ), daß die Prozesse cadlag in der ersten Komponente sind, da sie es in der zweiten sind.

Damit muß man die Stetigkeit auch nur noch bei  $(s', t') \uparrow (s, t)$  zeigen.

Sei  $s$  fest,  $X$  stochastisch stetig in der (starken) Norm-Topologie,  $t_n \uparrow t$ :

$$\begin{aligned}
 Y(s, t) - Y(s, t_n) &= \int_{]t_n, t]} Y(s, \tau) dX(\tau) = \\
 &= Y(s, t_n) (X(t) - X(t_n)) + \int_{]t_n, t]} (Y(s, \tau-) - Y(s, t_n)) dX(\tau)
 \end{aligned}$$

konvergiert gegen 0 nach Wahrscheinlichkeit in der (starken) Norm-Topologie.

Seit  $t$  fest,  $s_n \uparrow s$  :  $Y(0, s) = Y(0, s_n) Y(s_n, s)$ , da  $Y(0, s_n) \rightarrow Y(0, s)$  wie gezeigt, folgt  $Y(s_n, s) \rightarrow I$  n.W.

$$\Rightarrow Y(s_n, t) = Y(s_n, s) Y(s, t) \rightarrow Y(s, t) \text{ n.W.}$$

in der entsprechenden Topologie. Damit gilt also:

Die zu  $X$  gehörende Lösung von (J) ist eine stochastische Hemigruppe und (stark) stetig, falls  $X$  es ist.

Man zeigt nun, daß auch die Umkehrung der letzten Aussage gilt, falls zusätzlich  $Y(0, t)$  ein  $\Pi^*$ -Prozeß ist.

$Y(s, t)$  hat nur endlich viele Sprünge mit

$$\| Y(t-, t+) - I \| > \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

$$\tau_1 := \inf \{ t > 0 \mid \| Y(t-, t) - I \| > \varepsilon \}, \tau_0 := 0$$

$$\tau_{k+1} := \inf \{ t > \tau_k \mid \| Y(t-, t) - I \| > \varepsilon \}$$

Für  $s \leq t$  setze

$$Y^\varepsilon(s, t) := \prod_{k \geq 1} Y(\tau_{k-1} \vee s, (\tau_k -) \wedge t),$$

dann existiert  $(Y^\varepsilon(s, t))^{-1}$ , da alle  $(Y(\tau_{k-1} \vee s, (\tau_k -) \wedge t))^{-1}$  existieren: angenommen, daß ein  $(Y(\tau_{k-1} \vee s, (\tau_k -) \wedge t))^{-1}$  nicht existiert, dann sei  $t_0 := \inf \{ t > \tau_{k-1} \vee s \mid (Y(\tau_{k-1} \vee s, t))^{-1} \text{ existiert nicht} \}$

$$Y(\tau_{k-1} \vee s, t_0) = Y(\tau_{k-1} \vee s, t_0 - \delta) \cdot Y(t_0 - \delta, t_0),$$

wobei  $\delta$  so, daß  $\|Y(t_0 - \delta, t_0) - I\| \leq 3\varepsilon < 1$ . Aber  $(Y(t_0 - \delta, t_0))^{-1}$  und  $(Y(\tau_{k-1} \vee s, t_0 - \delta))^{-1}$ , also auch  $(Y(\tau_{k-1} \vee s, t_0))^{-1}$  existieren.

Man setzt nun

$$\mu^\varepsilon(\cdot) := \sum_{k \geq 1} (Y(\tau_{k-1}^-, \tau_k) - I) \delta_{\tau_k}(\cdot)$$

und definiert nun den Prozeß  $X$  als

$$(3.2) \quad X(t) := \int_{[0, t]} (Y^\varepsilon(0, \tau^-))^{-1} dY^\varepsilon(0, \tau) + \mu^\varepsilon([0, t])$$

(Bildet man rein formal auf beiden Seiten das Differential, so ergibt sich

$$X(dt) = (Y(t, t+dt) - I) \sum_k 1_{\tau_k} dt + \\ + \sum_k (Y(\tau_k^-, \tau_k) - I) 1_{\tau_k} \varepsilon dt; \text{ also ist}$$

$X$  unabhängig von  $\varepsilon$ , denn wenn man  $\varepsilon$  verändert, so verschiebt man nur Summanden von der ersten in die zweite Summe und umgekehrt.)

$X$  ist ein cadlag  $\Pi^*$ -Prozeß, stochastisch stetig falls  $Y$  das ist.

Man zeigt nun noch, daß  $Y$  die zu  $X$  gehörende Lösung von (J) ist.

Der Einfachheit wegen sei  $s = 0$ . Zu zeigen.

$$Y(0, t) - I = \int_{[0, t]} Y(0, \tau^-) dX(\tau)$$

$$\int_{[0, t]} Y(0, \tau^-) d\mu^\varepsilon(\tau) = \sum_{k \geq 1} 1_{\tau_k \leq t} Y(0, \tau_k^-) (Y(\tau_k^-, \tau_k) - I) = \\ = \sum_{k \geq 1} 1_{\tau_k \leq t} (Y(0, \tau_k) - Y(0, \tau_k^-))$$

$$\int_{[0, t]} Y(0, \tau^-) dX(\tau) = \int_{[0, t]} Y(0, \tau^-) (Y^\varepsilon(0, \tau^-))^{-1} dY^\varepsilon(0, \tau) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{[0,t]} Y(0, \tau-) \left( \prod_{k \geq 1} Y(\tau_{k-1}, \tau_k - \tau-) \right)^{-1} d \left( \prod_{k \geq 1} Y(\tau_{k-1}, \tau_k - \tau) \right) = \\
 &= \sum_{k \geq 1} \int_{[0,t]} Y(0, \tau-) 1_{\tau_{k-1}, \tau_k}(\tau) \left( \prod_{j=1}^{k-1} Y(\tau_{j-1}, \tau_j-) \cdot Y(\tau_{k-1}, \tau-) \right)^{-1} \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{j=1}^{k-1} Y(\tau_{j-1}, \tau_j-) dY(\tau_{k-1}, \tau) = \\
 &= \sum_{k \geq 1} \int_{[0,t]} 1_{\tau_{k-1}, \tau_k}(\tau) Y(0, \tau-) \left( Y(\tau_{k-1}, \tau-) \right)^{-1} dY(\tau_{k-1}, \tau) = \\
 &= \sum_{k \geq 1} \int_{[0,t]} 1_{\tau_{k-1}, \tau_k}(\tau) Y(0, \tau_{k-1}) dY(\tau_{k-1}, \tau) = \\
 &= \sum_{k \geq 1} Y(0, \tau_{k-1}) \left( Y(\tau_{k-1}, (\tau_k-) \wedge t) - I \right) 1_{\tau_{k-1} < t} = \\
 &= \sum_{k \geq 0} \left( Y(0, (\tau_k-) \wedge t) - Y(0, \tau_{k-1}) \right) 1_{\tau_k < t} \quad \text{also wird} \\
 &\int_{k \geq 0} Y(0, \tau_k-) dX(\tau) = \sum_{k \geq 0} \left( Y(0, (\tau_{k+1}-) \wedge t) - Y(0, \tau_k) \right) 1_{\tau_k < t} + \\
 &\quad + \sum_{k \geq 1} \left( Y(0, \tau_k) - Y(0, \tau_{k-1}) \right) 1_{\tau_k \leq t} = Y(0, t) - I
 \end{aligned}$$

Damit gilt der

## 1.2 Satz

Ist  $(Y(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2}$  eine stochastische Hemigruppe und ein  $\Pi^*$ -Prozeß,

dann gibt es einen  $\Pi^*$ -Prozeß  $X$ , so daß  $(Y(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2}$  die zu  $X$  ge-

hörende Lösung von (J) ist. Andererseits, ist  $X$  ein  $\Pi^*$ -Prozeß, so ist die zugehörige Lösung  $(Y(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2}$  von (J) eine stochastische Hemigruppe

und ein  $\Pi^*$ -Prozeß. Ist einer der Prozesse  $X$  oder  $Y$  (stark) stetig, so auch der andere.

$X$  und  $Y$  heißen assoziiert bzw.  $X$  heißt der zu  $Y$  gehörende integrierende Prozeß.

### 1.3 Folgerung

Hat  $X$  unabhängige Zuwächse, so hat  $Y$  (multiplikativ) unabhängige Zuwächse (d.h.  $s_1 < \dots < s_n \Rightarrow Y(s_1, s_2), \dots, Y(s_{n-1}, s_n)$  unabhängig) und umgekehrt.

### Beweis

Folgt aus den vorangegangenen Überlegungen

Satz 1.2 in Verbindung mit Satz I. 9 oder Satz II. 10 besagt, daß Verteilungskonvergenz von stochastischen Hemigruppen (zunächst nur bei festgehaltenem ersten Argument) vorliegt, wenn die entsprechenden Bedingungen in I. 9 und II. 10 von dem zur Hemigruppe gehörenden integrierenden Prozeß erfüllt werden (für endlichdimensionale Räume  $B$ ). Beispiele dafür sind I. 13 und, für die Konvergenz stochastisch stetiger Hemigruppen, Folgerung II. 14. Speziell Satz I. 9 soll in diesem Zusammenhang nochmals formuliert werden.

Seien also  $f_o$ ,  $\{f_{n,j}\}_{n,j}$  und  $\{T_{n,j}\}_{n,j}$  wie in Kapitel I,  $U_{n,j}$   $M^M$ -wertige Zufallsvariable.  $Y_{n,o} = Y_o = I \quad \forall n$ ,  $h_n(t, x, y) = h_o(t, x, y) = y$ . Man

betrachtet den Prozeß  $U_n(s, t) := \prod_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} U_{n,j}$ , der zugehörige additive Prozeß ist  $X_n(t) = \sum_{j=0}^{k_n(t)} (U_{n,j} - I)$ .

Da die Voraussetzung I. 3 und die Bedingungen für die  $Y_{n,o}$  in Satz I. 9 erfüllt sind, muß man nur die Voraussetzungen 4 und 5 formulieren,

d.h.  $X_{n,j}$  durch  $U_{n,j} - I$  ersetzen. Damit werden

$$P_n(\cdot \times [0, t]) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} P(U_{n,j} - I \in \cdot \mid f_{n,j-1}),$$

$$a_n(\delta, t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} E_{n,j-1} (U_{n,j} - I) 1_{\|U_{n,j} - I\| \leq \delta},$$

$$\bar{a}_n(\delta, t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} \|E_{n,j-1} (U_{n,j} - I) 1_{\|U_{n,j} - I\| \leq \delta}\|_1$$

$$b_n(\delta, t)(p, q, p', q') = \sum_{j=1}^{k_n(t)} (E_{n,j-1}(U_{n,j}(p, q) - \delta_{p,q}) \\ (U_{n,j}(p', q') - \delta_{p',q'}) \cdot 1_{\|U_{n,j} - I\| \leq \delta} - E_{n,j-1}(U_{n,j}(p, q) - \delta_{p,q}) \cdot 1_{\|U_{n,j} - I\| \leq \delta} \\ E_{n,j-1}(U_{n,j}(p', q') - \delta_{p',q'}) \cdot 1_{\|U_{n,j} - I\| \leq \delta})$$

Man macht die folgende

#### Voraussetzung 1

$D_1$  abzählbar und dicht in  $(R_+)$ ; es gibt Prozesse  $v, b, a$ , wie in

Voraussetzung I. 4 verlangt und es gilt für alle  $t \in D_1$ :

$$\max \{ P(\|U_{n,j} - I\| > \varepsilon \mid f_{n,j-1}) \mid j = 1, \dots, k_n(t) \} \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall \varepsilon > 0$$

$$P_n(\cdot \times [0, t]) \mid_{|x| > \delta} \xrightarrow{w} v(\cdot \times [0, t]) \mid_{|x| > \delta} \text{ n.W. für}$$

$$\text{alle } \delta \text{ mit: } v(\partial \{ \|x\| \leq \delta \} \times [0, t]) = \text{f.s. } \forall t' \in D_1$$

$$b_n(\eta, t)(p, q, p', q') \rightarrow b(\eta, t)(p, q, p', q') \quad \forall p, q, p', q' \text{ n.W.}$$

$$a_n(\eta, t) \rightarrow a(\eta, t) \text{ n.W.}$$

Zu jeder Teilfolge  $(n')$  c  $(n)$  gibt es eine Teilfolge  $(n'')$  c  $(n')$

und einen f.s. stetigen Prozeß  $X(\eta, \cdot)$ , so daß

$$\lim_{n''} (X_{n''}(\eta, t) - X_{n''}(\eta, s)) \leq X(\eta, t) - X(\eta, s) \text{ f.s.}$$

für alle  $s, t \in D_1$ ,  $s < t$ ,  $X(\eta, t)$   $\mathcal{F}_0$ -meßbar.

Mit Satz 1.2 und Satz I.13 gilt

#### 1.4 Folgerung

Ist Voraussetzung 1 erfüllt, dann gilt für jedes feste  $s$ : es gibt einen stochastisch stetigen Prozeß  $X$  und eine stochastisch stetige Hemigruppe  $U(\cdot, \cdot)$ , so daß  $(X_n, U_n(s, \cdot)) \xrightarrow{D} (X, U(s, \cdot))$ .

Auch im folgenden sei der zugrundeliegende Banachraum der  $\mathbb{M}^M$ . Sei eine stochastische Hemigruppe  $(Y(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2}$  oder der zugehörige additive Prozeß  $X(\cdot)$  gegeben.

Sei  $\phi : \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion,  $\phi(0) = 0$ , dann betrachtet man den transformierten Prozeß  $(X_{i,j}(t) = X((i,j)(t)))$  :

$$\begin{aligned} X^\phi(t) &:= \sum_{i,j}^M \frac{\partial}{\partial X_{i,j}} \phi(0) X_{i,j}(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=p}^M \sum_{p,q=1}^M \frac{\partial^2}{\partial X_{i,j} \partial X_{p,q}} \phi(0) \langle X_{i,j}^C, X_{p,q}^C \rangle(t) + \\ &+ \int (\phi(x) - \sum_{i,j=1}^M \frac{\partial}{\partial X_{i,j}} \phi(0) X_{i,j}) \mu(dX \times [0,t]) \end{aligned}$$

$X^\phi$  ist ein Semimartingal:

da  $\mu$  der zu  $X$  gehörende Punktprozeß ist, gilt

$\int \|X\|^2 \mu(dX \times [0,t]) < \infty$ ; schreibt man im folgenden  $\partial_{i,j}$  statt  $\frac{\partial}{\partial X_{i,j}}$ ,

so ist  $\|\phi(X) - \sum_{i=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) X_{i,j}\| \leq \|X\|^2 \cdot \text{Konstante}$ , damit folgt

die Behauptung. Nach Satz 1.2. gehört zu  $X^\phi$  die stoastische Hemigruppe

$(Y^\phi(s,t))_{(s,t) \in \mathbb{R}^2}$ . In (4) ist  $X^\phi \equiv N$ ,  $Y^\phi \equiv \varepsilon(N)$ ; dort wird in Théorème 2

gezeigt, wie man beide Prozesse durch stückweise konstante Prozesse

approximieren kann. Das Ziel ist zu zeigen, daß  $(X_n^\phi, Y_n^\phi)_n$  nach Verteilung

konvergiert für jedes obige  $\phi$ , wenn  $(X_n)_n$  die Voraussetzungen in Kap. II erfüllt.

Dazu muß man zuerst herausfinden, wie die lokalen Charakteristiken von  $X^\phi$  aussehen.

$$\begin{aligned} \Delta X^\phi(t) &= \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \Delta X_{i,j}(t) + (\phi(\Delta X(t)) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \Delta X_{i,j}(t)) = \\ &= \phi(\Delta X(t)) \end{aligned}$$

Also für jede Funktion  $h : \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{R}^1$  meßbar,  $\|h(X)\| \leq C \cdot \|X\|^2$  in einer Umgebung der 0, ist

$$\begin{aligned} \int h(x) \mu^\phi(dX \times [0,t]) &= \sum_{s \leq t} h(\Delta \cdot X^\phi(t)) = \sum_{s \leq t} h \circ \phi(\Delta X(t)) = \\ (3.3) \quad &= \int h \circ \phi(X) \mu(dX \times [0,t]) \end{aligned}$$

und damit wird

$$(3.4) \int h(x) \vee^{\phi} (dx \times [0, t]) = \int h \circ \phi(x) \vee(dx \times [0, t])$$

Sei  $f$  die Zentrierungs-Funktion aus Kapitel II :

$$f: \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M \text{ stetig, } f(x) = x \text{ für } \|x\| \leq \frac{1}{2},$$

$$f(x) = 0 \text{ für } \|x\| \geq 1 \text{ und } \|f(x)\| \leq 1 \quad \forall x,$$

$$\text{damit wird dann } (\tilde{X}^{\phi, e}) := (\tilde{X}^{\phi})^e$$

$$(3.5) \quad \tilde{X}^{\phi, e}(t) = \sum_{s \leq t} (\Delta X^{\phi}(t) - f(\Delta X^{\phi}(t))) = \int (\phi(x) - f \circ \phi(x)) \mu(dx \times (0, t))$$

Als nächstes bestimmt man  $B^{\phi}$ , dazu benutzt man die Darstellung (2.31).

$$X(t) - \tilde{X}^e(t) = X^c(t) + \tilde{X}^d(t) + \tilde{B}(t) \text{ mit den lokalen Martingalen}$$

$$X^c \text{ und } \tilde{X}^d \text{ und } \tilde{X}^e(t) = \int (X - f(x)) \mu(dx \times [0, t]). \text{ Damit wird}$$

$$\begin{aligned} X^{\phi}(t) - \tilde{X}^{\phi, e}(t) &= \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) (X_{i,j}^c(t) + \tilde{X}_{i,j}^d(t) + \tilde{X}_{i,j}^e(t) + \tilde{B}_{i,j}(t)) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{p,q=1}^M \partial_{i,j} \partial_{p,q} \phi(0) \langle X_{i,j}^c, X_{p,q}^c \rangle(t) + \\ &+ \int (\phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) X_{i,j}) \mu(dx \times [0, t]) - \\ &- \int (\phi(X) - f \circ \phi(X)) \mu(dx \times [0, t]) = \\ &= \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) (X_{i,j}^c(t) + \tilde{X}_{i,j}^d(t)) + \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \tilde{B}_{i,j}(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{p,q=1}^M \partial_{i,j} \partial_{p,q} \phi(0) \langle X_{i,j}^c, X_{p,q}^c \rangle(t) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \int (X_{i,j} - f_{i,j}(x)) \mu(dx \times [0, t]) + \\ &+ \int (\phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) X_{i,j}) \mu(dx \times [0, t]) - \\ &- \int (\phi(X) - f \circ \phi(X)) \mu(dx \times [0, t]) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 = & \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) X_{i,j}^C(t) + \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \tilde{X}_{i,j}^d(t) + \\
 & + \int (f_0 \phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) f_{i,j}(X)) (\mu - \nu) (dx \times [0, t]) + \\
 & + \int (f_0 \phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) f_{i,j}(X)) \nu(dx \times [0, t]) + \\
 & + \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \tilde{B}_{i,j}(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{p,q=1}^M \partial_{i,j} \partial_{p,q} \phi(0) \langle X_{i,j}^C, X_{p,q}^C \rangle (t)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$X^{\phi,C}(t) = \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) X_{i,j}^C(t)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}^{\phi,d}(t) = & \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \int (X_{i,j} - 1)_{\|X\| \leq \frac{1}{2}} + f_{i,j}(X) (1 - \frac{1}{2})_{\|X\| > \frac{1}{2}} \\
 & (\mu - \nu) (dx \times [0, t])
 \end{aligned}$$

$$(3.6) \quad + \int (f_0 \phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) f_{i,j}(X)) (\mu - \nu) (dx \times [0, t])$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}^{\phi}(t) = & \int (f_0 \phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) f_{i,j}(X)) \nu(dx \times [0, t]) + \\
 & + \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \tilde{B}_{i,j}(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{p,q=1}^M \partial_{i,j} \partial_{p,q} \phi(0) \langle X_{i,j}^C, X_{p,q}^C \rangle (t)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch sofort:

$$\begin{aligned}
 C^{\phi}(p,q,p',q')(t) & = \langle X_{p,q}^{\phi,C}, X_{p',q'}^{\phi,C} \rangle (t) = \\
 (3,7) \quad & = \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \phi_{p,q}(0) \partial_{k,l} \phi_{p',q'}(0) \langle X_{i,j}^C, X_{k,l}^C \rangle (t)
 \end{aligned}$$

Da nun Folgen  $X_n(t)$  betrachtet werden, schreibt man wieder  $X(i,j)(t)$  statt  $X_{i,j}(t)$ . Es seien die Grundvoraussetzungen vom Beginn von Kapitel II über die Wahrscheinlichkeitsräume, Filtrierungen usw. erfüllt, dann hat man den folgenden

### 1.5 Satz

Sei  $\phi : \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  eine dreimal stetige differenzierbare Funktion mit  $\phi(0) = 0$ ,

a) Ist die Voraussetzung II. 1 erfüllt und

$$\sum_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n(s)\|^2 \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t \in D_1, \text{ dann gilt } X_n^\phi \xrightarrow{D} X^\phi$$

b) Sind die Voraussetzungen II. 1 - 4 erfüllt, dann gilt

$$(Y_{n,0}, X_n^\phi, Y_n^{\phi,h}) \xrightarrow{D} (Y_0, X^\phi, Y^{\phi,h}), \text{ wo } Y_n^{\phi,h} \text{ die Lösung von}$$

$$(J') \quad Y_n^{\phi,h}(t) = Y_{n,0} + \int_{[0,t]} h_n(s, X_n^\phi(s-), Y_n^{\phi,h}(s-)) dX_n^\phi(s)$$

ist, entsprechend  $Y^{\phi,h}$ .

c) Sind die Voraussetzungen II. 1 und 2 erfüllt, dann gilt für die

zu  $X_n^\phi$  gehörenden stochastischen Hemigruppen  $Y_n^\phi(s, \cdot)$ ,  $s \in \mathbb{R}_+$

$$(X_n^\phi, Y_n^\phi(s, \cdot)) \xrightarrow{D} (X^\phi, Y^\phi(s, \cdot))$$

D) Die in a) - c) auftretenden Grenzprozesse sind stochastisch stetig.

### Beweis

a) Man zeigt, daß Voraussetzung II. 1 für die lokalen Charakteristiken von  $X_n^\phi, X^\phi$  erfüllt ist.

zu II. 1 i):  $\phi(0) = 0$  und  $\phi$  stetig  $\Rightarrow$

$$\bigvee_{\delta, \delta'} \{ \|\phi(X)\| > \delta \} \subseteq \{ \|X\| > \delta' \}, \text{ also mit (3.4)}$$

$$\sup \{ \nu^\phi(\{ \|X\| > \delta \} \times \{s\}) \mid s \leq t \} \leq \sup \{ \nu\{ \|X\| > \delta' \} \times \{s\} \mid s \leq t \} \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

zu II. 1 ii):

Man weist Bedingung 1 ii') (siehe Bemerkung zu Voraussetzung 1 ii) )

nach:  $g$  beschränkt und stetig und  $g = 0$  auf einer Umgebung der  $0 \Rightarrow$

$$\int g(X) \nu_n^\phi(dX \times [0, t]) \rightarrow \int g(X) \nu^\phi(dX \times [0, t]) \text{ n.W. } \forall t \in D_1$$

sei also  $g|_{\|x\| \leq \delta} \equiv 0$ ; es gibt ein  $\delta'$ , so daß

$$\|x\| \leq \delta' \Rightarrow \|\phi(x)\| \leq \delta \text{ also } g \circ \phi|_{\|x\| \leq \delta'} \equiv 0, \text{ da } g \circ \phi$$

beschränkt und stetig ist folgt aus Voraussetzung 1 ii) für  $v_n$ :

$$\int g \circ \phi(x) v_n(dx \times [0, t]) + \int g \circ \phi(x) v(dx \times [0, t]) \text{ n.W. } \forall t \in D_1$$

Aus (3.4) folgt dann die Behauptung

zu II. 1 iii):

Wegen  $\Delta \tilde{B}_n^\phi(s) = \int f(x) v_n^\phi(dx \times \{s\})$  muß man also zeigen:

$$\begin{aligned} C_n^\phi(p, q, p', q')(t) + \int f(p, q)(x) f(p', q')(x) v_n^\phi(dx \times [0, t]) - \\ - \sum_{s \leq t} \tilde{B}_n^\phi(p, q)(s) \tilde{B}_n^\phi(p', q')(s) + C^\phi(p, q, p', q')(t) + \\ + \int f(p, q)(x) f(p', q')(x) v^\phi(dx \times [0, t]) \text{ n.W. } \forall t \in D_1 \end{aligned}$$

Aus (3.4) und (3.7) folgt damit

$$\begin{aligned} C_n^\phi(p, q, p', q')(t) + \int f(p, q)(x) f(p', q')(x) v_n^\phi(dx \times [0, t]) - \\ - \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n^\phi(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n^\phi(p', q')(s) = \\ = \sum_{i, j=1}^M \sum_{k, l=1}^M \partial_{i, j} \phi(p, q)(0) \partial_{k, l} \phi(p', q')(0) < X_n^C(i, j), X_n^C(k, l) > (t) + \\ + \int f(p, q) \circ \phi(x) f(p', q') \circ \phi(x) v_n(dx \times [0, t]) - \\ - \sum_{s \leq t} \int f(p, q) \circ \phi(x) v_n(dx \times \{s\}) \int f(p', q') \circ \phi(x) v_n(dx \times \{s\}) = \\ = \sum_{i, j=1}^M \sum_{k, l=1}^M \partial_{i, j} \phi(p, q)(0) \partial_{k, l} \phi(p', q')(0) (C_n(i, j, k, l)(t) + \\ + \int f(i, j)(x) f(k, l)(x) v_n(dx \times [0, t]) - \sum_{s \leq t} \tilde{B}_n(i, j)(s) \tilde{B}_n(k, l)(s)) + \\ + \int (f(p, q) \circ \phi(x) f(p', q') \circ \phi(x) - \sum_{i, j=1}^M \sum_{k, l=1}^M \partial_{i, j} \phi(p, q)(0) \partial_{k, l} \phi(p', q')(0) \\ \cdot f(i, j)(x) f(k, l)(x)) v_n(dx \times [0, t]) - \\ - \sum_{s \leq t} (\int f(p, q) \circ \phi(x) v_n(dx \times \{s\}) \int f(p', q') \circ \phi(x) v_n(dx \times \{s\}) - \end{aligned}$$

$$- \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} \partial_{i,j} \phi(p,q)(0) \partial_{k,l} \phi(p',q')(0) \int f(p,q)(x) v_n(dx x\{s\}) \\ \int f(p',q')(x) v_n(dx x\{s\}) = S_{1,n} + S_{2,n} - S_{3,n}$$

Voraussetzung II 1. iii) ist für  $X_n$  erfüllt, also gilt:

$$S_{1,n} \rightarrow \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} \partial_{i,j} \phi(p,q)(0) \partial_{k,l} \phi(p',q')(0) (C(i,j,k,l)(t) + \\ \int f(i,j)(x) f(k,l)(x) v(dx x [0,t])) \text{ n.W.}$$

zu  $S_{2,n}$ :

$$\{ \|x\| \leq \delta \} \subseteq \{ |h(x)| \leq k \cdot \|x\|^3 \} \text{ für } k > 0, 0 < \delta < \frac{1}{2} \text{ und}$$

(3.8)  $h$  stetig und beschränkt, dann gilt:

$$\int h(x) v_n(dx x [0,t]) \rightarrow \int h(x) v(dx x [0,t]) \text{ n.W.}$$

Beweis (3.8): Es gibt eine stetige Funktion  $h_\delta$  zu  $\delta > 0$  mit  $h_\delta(x) = 1$

für  $\|x\| \leq \frac{\delta}{2}$ ,  $h_\delta(x) = 0$  für  $\|x\| \geq \delta$ ,  $|h_\delta(x)| \leq 1 \quad \forall x$

Sei  $(\delta_m)_m$  eine monotone Nullfolge;

$$(3.9) \int h(x) (1 - h_{\delta_m}(x)) v_n(dx x [0,t]) \rightarrow$$

$$\int h(x) (1 - h_{\delta_m}(x)) v(dx x [0,t]) \text{ n.W. } \forall m$$

$$|h(x) h_{\delta_m}(x)| \leq k \cdot \|x\|^3 \quad \forall x \Rightarrow$$

$$\int |h(x) h_{\delta_m}(x)| v_n(dx [0,t]) \leq k \cdot \delta_m \int \|x\|^{-1} 1_{\|x\| \leq \delta_m} v_n(dx x [0,t])$$

$$\leq k \delta_m \sum_{p,q} (C_n(p,q,p,q)(t) + \int f^2(p,q)(x) v_n(dx x [0,t])), \text{ denn}$$

$$\text{für } \|x\| < \delta_m \leq \frac{1}{2} \text{ ist } f(p,q)(x) = x(p,q).$$

Mit Voraussetzung II. 1 iii) für  $X_n$  folgt dann

$$(3.10) \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\int |h(x) h_{\delta_m}(x)| v_n(dx x [0,t]) > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0, t \in D_1$$

$$\text{mit } \int \|x\|^2 v(dx x [0,t]) < \infty \text{ gilt auch}$$

$$(3.11) \lim_{m \rightarrow \infty} P(\int |h(x) h_{\delta_m}(x)| v_n(dx x [0,t]) > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0, t \in D_1$$

Aus (3.9), (3.10), (3.11) und der Zerlegung

$$|\int h(x) v_n(dx x [0,t]) - \int h(x) v(dx x [0,t])| \leq$$

$$\leq |\int h(x) (1 - h_{\delta_m}(x)) v_n(dx x [0,t]) - \int h(x) (1 - h_{\delta_m}(x)) v(dx x [0,t])| +$$

$$+ \int |h(X) h_{\delta, m}| v_n (dx \times [0, t]) + \int |h(X) h_{\delta, m}(X)| v (dx \times [0, t])$$

folgt dann (3.8). Man setzt nun

$$\begin{aligned} h_1(X) &= \phi(p, q)(X) \phi(p', q')(X) - \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \phi(p, q)(0) \\ &\quad \partial_{k,l} \phi(p', q')(0) X(i, j) X(k, l) = \\ &= (\phi(p, q)(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(p, q)(0) X(i, j)) \phi(p', q')(X) + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(p, q)(0) X(i, j) \phi(p', q')(X) - \sum_{k,l=1}^M \partial_{k,l} \phi(p', q')(0) X(k, l) \end{aligned}$$

$\phi$  ist dreimal stetig differenzierbar mit  $\phi(0) = 0$

Also ist für ein  $\delta > 0$

$$|\phi(p', q')(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(p', q')(0) X(i, j)| \leq k' \cdot \|X\|^2 \vee \|X\| \leq \delta, \forall p', q'$$

$$\Rightarrow |h_1(X)| \leq k \cdot \|X\|^3 \vee \|X\| \leq \delta$$

Nun gilt für  $\|X\| \leq \frac{1}{2} : f(X) = X$ ;

da o.E.  $\delta$  so klein ist, daß  $\|\phi(X)\| \leq \frac{1}{2}$  für  $\|X\| \leq \delta$ , so hat man

$$f(p, q) \circ \phi(X) = \phi(p, q)(X) \vee \|X\| \leq \delta \vee p, q.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} h(X) &= f(p, q) \circ \phi(X) f(p', q') \circ \phi(X) - \\ &- \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \phi(p, q)(0) \partial_{k,l} \phi(p', q')(0) \cdot f(i, j)(X) f(k, l)(X), \end{aligned}$$

dann ist  $h(X) = h_1(X)$  für  $\|X\| \leq \delta$ , also

$$|h(X)| \leq k \cdot \|X\|^3 \vee \|X\| \leq \delta \text{ und damit gilt nach (3.8)}$$

$$S_{2,n} = \int h(X) v_n(dx \times [0, t]) \rightarrow \int h(X) v(dx \times [0, t]) \text{ n.W.}$$

zu  $S_{3,n}$  :

Durch Einfügen eines Summanden erhält man

$$\begin{aligned} S_{3,n} &= \sum_{s \leq t} \int (f(p, q) \circ \phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(p, q)(0) f(p, q)(X) v_n(dx \times \{s\}) \cdot \\ &\quad \cdot f(p', q') \circ \phi(X) v_n(dx \times \{s\})) + \\ &+ \sum_{s \leq t} \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(p, q)(0) \int f(p, q)(X) v_n(dx \times \{s\}) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \int (f(p', q') \circ \phi(X) - \sum_{k,l=1}^M \partial_{k,l} \phi(p', q')(0) f(p', q')(X)) v_n(dX \times \{s\}) = \\ & = S_{3,1,n} + S_{3,2,n} \end{aligned}$$

Für  $S_{3,1,n}$  hat man die folgende Abschätzung wegen

$$f(p, q)(X) = X(p, q) \text{ für } \|X\| \leq \frac{1}{2} \text{ gibt es ein } \delta, \text{ so daß}$$

$$\|\phi(X)\| \leq \frac{1}{2} \text{ für } \|X\| \leq \delta \text{ und daher } f(p, q) \circ \phi(X) = \phi(p, q)(X) \text{ ist,}$$

da  $\phi$  dreimal stetig differenzierbar ist, erhält man

$$\left| f(p, q) \circ \phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(p, q)(0) f(p, q)(X) \right| \leq$$

$$\leq K (\|X\|^2 1_{\|X\| \leq \delta} + 1_{\|X\| > \delta}) \leq$$

$$\leq K \left( \sum_{p,q=1} f^2(p, q)(X) + (1 - h_\delta(X)) \right) \text{ (mit der Funktion}$$

$$h_\delta \text{ von oben) und (da } v_n(M^M \times \{s\}) \leq 1)$$

$$\left| \int f(p', q') \circ \phi(X) v_n(dX \times \{s\}) \right| \leq K \delta_m + v_n(\{\|X\| > \delta_m\} \times \{s\}), \text{ also}$$

$$\left| S_{3,1,n} \right| \leq (K \delta_m + \sup_{s \leq t} v_n(\{\|X\| > \delta_m\} \times \{s\})) \cdot$$

$$\cdot \int K \left( \sum_{p,q=1}^M f^2(p, q)(X) + (1 - h_\delta(X)) \right) v_n(dX \times (0, t))$$

Da die Voraussetzung II. 1 für  $X_n$  erfüllt ist, gilt dann:

$$\lim_n P(|S_{3,1,n}| > \epsilon) = \lim_m \lim_n P(|S_{3,1,n}| > \epsilon) \leq$$

$$\leq \lim_m P(K^2 \delta_m \cdot \int (1 - h_\delta(X)) v(dX \times [0, t]) +$$

$$+ \sum_{p,q=1}^M (C(p, q, p, q)(t) + \int f^2(p, q) v(dX \times [0, t]) > \epsilon) = 0$$

$$\text{ebenso zeigt man } \lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_{3,2,n}| > \epsilon) = 0, \text{ also } S_{3,n} \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

Insgesamt gilt damit:

$$\begin{aligned} C_n^\phi(p, q, p', q')(t) + \int f(p, q)(X) f(p', q')(X) v_n^\phi(dX \times [0, t]) - \\ - \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n^\phi(p, q)(s) \Delta \tilde{B}_n^\phi(p', q')(s) = S_{1,n} + S_{2,n} - S_{3,n} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \phi(p,q)(0) \partial_{k,l} \phi(p',q')(0) \\
 & \quad (C(i,j,k,l)(t) + \int f(i,j)(x) f(k,l)(x) v(dx \times [0,t]) ) + \\
 & + \int ( f(p,q) \circ \phi(X) f(p',q') \circ \phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \phi(p,q)(0) \partial_{k,l} \phi(p',q')(0) \cdot \\
 & \quad \cdot f(i,j)(x) f(k,l)(x) v(dx \times [0,t]) ) =
 \end{aligned}$$

$$C_n^\phi(p,q,p',q')(t) + \int f(p,q)(x) f(p',q')(x) v_n^\phi(dx \times [0,t]) \quad n.w.$$

Damit ist Voraussetzung II. 1 iii) für  $X_n^\phi$  erfüllt.

$$\begin{aligned}
 \text{Da } S_{3,n} &= \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n^\phi(p,q)(s) \Delta \tilde{B}_n^\phi(p',q')(s) - \\
 & - \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \phi(p,q)(0) \partial_{k,l} \phi(p',q')(0) \\
 & \quad \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{B}_n^\phi(p,q)(s) \Delta \tilde{B}_n^\phi(p',q')(s)
 \end{aligned}$$

ist,  $S_{3,n} \rightarrow 0$  n.W. und nach Voraussetzung

$$\sum_{s \leq t} \left| \Delta \tilde{B}_n^\phi(s) \right|^2 \rightarrow 0 \quad \text{n.W. folgt auch}$$

$$(3.12) \quad \sum_{s \leq t} \left| \Delta \tilde{B}_n^\phi(s) \right|^2 \rightarrow 0 \quad \text{n.W.} \quad \text{und damit folgt}$$

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad & C_n^\phi(p,q,p',q')(t) + \int f(p,q)(x) f(p',q')(x) v_n^\phi(dx \times [0,t]) \\
 & + C^\phi(p,q,p',q')(t) + \int f(p,q)(x) f(p',q')(x) v^\phi(dx \times [0,t]) \\
 & \quad \text{n.W. } \forall t \in D_1
 \end{aligned}$$

Zu II. 1 iv) :

Mit (3.6) ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_n^\phi(t) &= f(f \circ \phi)(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) f(i,j)(X) v_n(dx \times [0,t]) \\
 &+ \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \tilde{B}_n(i,j)(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \partial_{k,l} \phi(0) < x_n^C(i,j), \\
 x_n^C(k,l) > (t) &= f(f \circ \phi)(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) f(i,j)(X) - \\
 (*) \quad &- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \partial_{k,l} \phi(0) f(i,j)(X) f(k,l)(X) v_n(dx \times [0,t]) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \partial_{k,l} (C_n(i,j,k,l)(t) + \\
 &\quad + f f(i,j)(X) f(k,l)(X) v_n(dx \times [0,t]) + \\
 &+ \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \tilde{B}_n(i,j)(t) =: F_{n,1}(t) + F_{n,2}(t) + F_{n,3}(t)
 \end{aligned}$$

Zu  $F_{n,3}(t)$  :

Nach Voraussetzung gilt:  $\sup_{s \leq t} \|\tilde{B}_n(s) - B(s)\| \rightarrow 0$  n.W.  $\forall t$

$$\Rightarrow \sup_{s \leq t} \left\| \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) \tilde{B}_n(i,j)(s) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) B(i,j)(s) \right\| \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

Zu  $F_{n,2}(t)$  :

Man zeigt:

$$\begin{aligned}
 &\sup_{s \leq t} \left\| \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \partial_{k,l} \phi(0) \right. \\
 &\quad \left. (C_n(i,j,k,l)(s) + f f(i,j)(X) f(k,l)(X) v_n(dx \times [0,t])) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \partial_{k,l} \phi(0) (C(i,j,k,l)(s) + \right. \\
 &\quad \left. + f f(i,j)(X) f(k,l)(X) v(dx \times [0,t])) \right\| \rightarrow 0 \text{ n.W.}
 \end{aligned}$$

dafür hinreichend ist, wenn für alle  $i,j,k,l$

$$\begin{aligned}
 &\sup_{s \leq t} \left| C_n(i,j,k,l)(s) + f f(i,j)(X) f(k,l)(X) v_n(dx \times [0,t]) - \right. \\
 (3,14) \quad &\left. - C(i,j,k,l)(s) - f f(i,j)(X) f(k,l)(X) v(dx \times [0,t]) \right| \rightarrow 0 \text{ n.W.}
 \end{aligned}$$



Da Voraussetzung II. 1 iii) für  $X_n$  erfüllt ist und  $\sum_{s \leq t} \|\Delta B_n(s)\| \rightarrow 0$  n.W.,  
hat man für alle  $i, j, k, l; s \in D_1$ :

$$C_n(i, j, k, l)(s) + \int f(i, j)(X) f(k, l)(X) v_n(dx \times [0, t]) \rightarrow \\ + C(i, j, k, l)(s) + \int f(i, j)(X) f(k, l)(X) v(dx \times [0, t]) \quad \text{n. W.}$$

daraus folgt aber sofort (3.14), wenn man zeigen kann:

$$\begin{aligned} & Z(s) \text{ f.s. stetig auf } [0, t]; t \in D_1; Z_n(s), Z(s) \text{ monoton wachsend} \\ (3.15) \quad & \text{auf } [0, t] \text{ mit } Z_n(0) = Z(0) = 0, Z_n(s) \rightarrow Z(s) \text{ n.W. } \forall s \in D_1 \cap [0, t] \\ & \Rightarrow \sup |Z_n(s) - Z(s)| \rightarrow 0 \text{ n.W.} \end{aligned}$$

Beweis (3.15): Sei  $(n')$  Teilfolge von  $(n)$ ; konstruiere eine Diagonal-  
folge  $(n'')$   $\subset (n')$  mit  $Z_{n''}(s) \rightarrow Z(s)$  f.s.  $\forall s \in D_1(0, t)$ ;  
damit gilt für fast alle  $\omega$ :

$$\begin{aligned} & Z_{n''}(s, \omega), Z(s, \omega) \text{ monoton wachsend; } Z(s, \omega) \text{ stetig; } Z(0, \omega) = Z_{n''}(0, \omega) = 0; \\ & Z_{n''}(s, \omega) \rightarrow Z(s, \omega) \quad \forall s \in [0, t] \cap D_1 \text{ und } Z_{n''}(t, \omega) \rightarrow Z(t, \omega) \\ \Rightarrow \sup_{s \leq t} |Z_{n''}(s, \omega) - Z(s, \omega)| & \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also enthält jede Teilfolge von  $(\sup_{s \leq t} |Z_n(s) - Z(s)|)_n$  ein f.s.

gegen 0 konvergente Teilfolge, damit gilt (3.15).

Zu  $F_{n,1}(t)$ :

$$\begin{aligned} \text{man setzt: } h(x) &:= f \circ \phi(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) f(i,j)(X) - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \partial_{k,l} \phi(0) f(i,j)(X) f(k,l)(X) \end{aligned}$$

$$\text{zu zeigen: } \sup_{s \leq t} \left| \int h(X) v_n(dx \times [0, s]) - \int h(X) v(dx \times [0, s]) \right| \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

dafür hinreichend ist, wenn für alle  $p, q$

$$\sup_{s \leq t} \left| \int h(p, q)(X) v_n(dx \times [0, s]) - \int h(p, q)(X) v(dx \times [0, s]) \right| \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

$$\text{mit den stetigen Funktionen } h_{\delta_m}(X) \left\{ \begin{array}{ll} = 1 & , \|X\| \leq \frac{1}{2} \delta_m \\ = 0 & , \|X\| \geq \delta_m \\ \in [0, 1] & \text{sonst} \end{array} \right.$$

und dem positiven  $h_+(p,q)(X)$  und negativen Teil  $h_-(p,q)(X)$  von  $h(p,q)$  schreibt man

$$\begin{aligned} & \sup_{s \leq t} \left| \int h(p,q)(X) v_n(dX \times [0,s]) - \int h(p,q) v_n(dX \times [0,s]) \right| \leq \\ & \leq \sup_{s \leq t} \left| \int h_+(p,q)(X) (1 - h_{\delta_m}(X)) v_n(dX \times [0,s]) - \right. \\ & \quad \left. - \int h_+(p,q)(X) (1 - h_{\delta_m}(X)) v(dX \times [0,s]) \right| + \\ & + \sup_{s \leq t} \left| \int h_-(p,q)(X) (1 - h_{\delta_m}(X)) v_n(dX \times [0,s]) - \right. \\ & \quad \left. - \int h_-(p,q)(X) (1 - h_{\delta_m}(X)) v(dX \times [0,s]) \right| + \\ & + \int \left| h(p,q)(X) h_{\delta_m}(X) \right| v_n(dX \times [0,t]) + \\ & + \int \left| h(p,q)(X) h_{\delta_m}(X) \right| v(dX \times [0,t]) \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß die ersten beiden Summanden nach Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergieren:

$$h_+(p,q)(X) (1 - h_{\delta_m}(X)) = 0 \text{ für } \|X\| \leq \frac{1}{2} \delta_m, \text{ mit (3,9)}$$

folgt die punktweise Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit gegen 0 und mit (3.15) die gleichmäßige Konvergenz; ebenso für die zweiten Summanden.

Da  $\phi$  dreimal stetig differenzierbar ist und es ein  $\delta < \frac{1}{2}$  gibt, so daß

$$\|\phi(X)\| < \frac{1}{2} \vee \|X\| \leq \delta_m, \text{ also } f \circ \phi(X) = \phi(X) \text{ und}$$

$f(i,j)(X) = X(i,j) \vee \|X\| \leq \delta_m$ , ist  $h$  auf  $\{\|X\| \leq \delta_m\}$  gerade die

Taylor-Entwicklung von  $\phi$ ,

$$(**) \quad \|h(X)\| \leq K \cdot \|X\|^3 \vee \|X\| \leq \delta_m$$

$$\text{Daraus folgt: } \|h(p,q)(X) h_{\delta_m}(X)\| \leq K \cdot \|X\|^3 \vee X$$

Nach (3.8) gilt dann

$$\begin{aligned} & \int \|h(p,q)(X) h_{\delta_m}(X)\| v_n(dX \times [0,t]) \rightarrow \\ & \rightarrow \int \|h(p,q)(X) h_{\delta_m}(X)\| v(dX \times [0,t]) \text{ n.W.} \end{aligned}$$

andererseits gilt wegen  $\int (\|X\|^2 \wedge 1) \, v \, (dX \times [0, t]) < \infty$

$$\int \|h(p, q)(X) h_{\phi_m}(X)\| \, v \, (dX \times [0, t]) \rightarrow 0 \text{ f.s.}$$

Insgesamt folgt damit die behauptete gleichmäßige Konvergenz von  $F_{n,1}(t)$ .

Faßt man nun die Ergebnisse zusammen, so erhält man die Konvergenz

$$(3.16) \quad \sup_{s \leq t} \|\tilde{B}_n^\phi(s) - \tilde{B}^\phi(s)\| \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t.$$

Insgesamt hat man nun gezeigt, daß die Voraussetzung II.1 für  $X_n^\phi$  erfüllt ist. Nach Folgerung II. 9 b) gilt dann  $X_n^\phi \rightarrow X^\phi$ .

b) Es muß gezeigt werden, daß für den Prozeß  $X_n^\phi$  die Voraussetzungen II. 1 und 2 erfüllt sind. Zunächst gilt wegen II. 1 i) und II. 2 (siehe Bemerkungen zur Voraussetzung II. 1 iii):

$$\sum_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n^\phi(s)\|^2 \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t$$

Damit sind die Voraussetzungen für Teil a) erfüllt, d.h. die Voraussetzung II. 1 ist für  $X_n^\phi$  erfüllt und es gelten die Aussagen aus dem Beweis zu a).

Damit bleibt zu zeigen:

Zu jeder Teilfolge  $(n') \subset (n)$  gibt es eine Teilfolge  $(n'') \subset (n')$

(3.17) und eine  $f_\phi$ -meßbare, f.s. stetige Funktion  $\hat{\phi}$  mit

$$\overline{\lim_{n'' \rightarrow \infty}} \int_{[s, t]} \|d\tilde{B}_n^\phi\| \leq \hat{\phi}(t) - \hat{\phi}(s) \text{ f.s. } \forall s, t \in D_1$$

Dazu benutzt man die Darstellung (\*) von  $B_n^\phi$  aus dem Beweis zu II. iv) in a):

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n^\phi(t) - \tilde{B}_n^\phi(s) &= \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) (\tilde{B}_n(i,j)(t) - \tilde{B}_n(i,j)(s)) + \\ &+ \int (f \circ \phi)(X) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) f(i,j)(X) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \partial_{k,l} \phi(0) f(i,j)(X) f(k,l)(X) \, v_n(dX \times [s, t]) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \partial_{k,l} \phi(0) (C_n(i,j,k,l)(t) - C_n(i,j,k,l)(s)) + \\ + \int f(i,j)(x) f(k,l)(x) v_n(dx \times ]s,t]) = S_1 + S_2 + S_3$$

Zu  $S_1$  : Es gibt eine Konstante  $K_1$ , so daß

$$(+) \left\| \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) (\tilde{B}_n(i,j)(t) - \tilde{B}_n(i,j)(s)) \right\| \leq K_1 \left\| \tilde{B}_n(t) - \tilde{B}_n(s) \right\|$$

Zu  $S_2$  : Es gibt ein  $\delta < \frac{1}{2}$ , so daß  $\|\phi(X)\| < \frac{1}{2} \forall \|X\| < \delta$   
mit der Funktion  $h_\delta$  (s.o.) hat man nach (\*\*) mit

$$h(x) = \phi(x) - \sum_{i,j=1}^M \partial_{i,j} \phi(0) f(i,j)(x) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^M \partial_{i,j} \partial_{k,l} \phi(0) f(i,j)(x) f(k,l)(x)$$

$$\|h(x)\| \leq K_2 \|x\|^3 \forall \|x\| \leq \delta, \text{ also } \|h(x) - h_\delta(x)\| \leq K_2 \|x\|^3 h_\delta(x);$$

wegen  $\|f(x)\| \leq 1 \forall x$  gibt es ein  $K_3$  mit  $\|h(x)\| \leq K_3 \forall x$ ,

$$\text{also } \|h(x) - h_\delta(x)\| \leq K_3 (1 - h_\delta(x)); \quad K_4 := \max(K_2, K_3)$$

damit gilt:  $\|h(x)\| \leq K_4 (\|x\|^3 h_\delta(x) + (1 - h_\delta(x)))$ , also

$$(++) \left\| \int h(x) v_n(dx \times ]s,t]) \right\| \leq K_4 \int (\|x\|^3 h_\delta(x) + (1 - h_\delta(x))) v_n(dx \times ]s,t])$$

Zu  $S_3$  : Es gibt eine Konstante  $K_5$ , so daß

$$(+++) \left| S_3 \right| \leq K_5 \max_{i,j} (C_n(i,j,i,j)(t) - C_n(i,j,i,j)(s)) + \\ + \int f^2(i,j)(x) v_n(dx \times ]s,t])$$

Setzt man  $K_6 = \max(K_1, K_4, K_5)$ , so folgt aus (+), (++), (+++) :

$$\left\| \tilde{B}_n^\phi(t) - \tilde{B}_n^\phi(s) \right\| \leq K_6 \left\| \tilde{B}_n(t) - \tilde{B}_n(s) \right\| + \\ + K_6 \int (\|x\|^3 h_\delta(x) + (1 - h_\delta(x))) v_n(dx \times ]s,t]) + \\ + K_6 \max_{i,j} (C_n(i,j,i,j)(t) - C_n(i,j,i,j)(s)) + \int f^2(i,j)(x) v_n(dx \times ]s,t])$$

$$\text{Setzt man nun } F_{n,1}(t) := K_6 \int_0^t \left\| d\tilde{B}_n(\tau) \right\|,$$

$$F_{n,2}(t) := K_6 \int \|X\|^3 h_\delta(X) + (1 - h_\delta(X)) v_n(dx \times [0, t])$$

$$F_{n,3}(t) := K_6 \max_{i,j} (C_n(i,j,i,j)(t) + \int f^2(i,j)(X) v_n(dx \times [0, t]))$$

so gilt:

$$\begin{aligned} \int_s^t \|\tilde{B}_n^\phi(\tau)\| &\leq \int_s^t dF_{n,1}(\tau) + \int_s^t dF_{n,2}(\tau) + \int_s^t dF_{n,3}(\tau) = \\ (3.18) \quad &= K_6 \int_s^t \|\tilde{B}_n(\tau)\| + (F_{n,2}(t) - F_{n,2}(s)) + F_{n,3}(t) - F_{n,3}(s) \end{aligned}$$

Nun setzt man

$$F_2(t) := K_6 \int (\|X\|^3 h_\delta(X) + (1 - h_\delta(X)) v(dx \times [0, t]) \text{ und}$$

$$F_3(t) := K_6 \max_{i,j} (C(i,j,i,j)(t) + \int f^2(i,j)(X) v(dx \times [0, t]))$$

Beweis (3.17) :

Sei  $(n') \subseteq (n)$ ; da Voraussetzung 2 erfüllt ist, gibt es eine Teilfolge

$(n'') \subseteq (n')$  und ein  $f_0$ -meßbares, f.s. stetiges  $\tilde{\phi}$  mit

$$\lim_{n'' \rightarrow \infty} \int_s^t \|\tilde{B}_n(\tau)\| \leq \tilde{\phi}(t) - \tilde{\phi}(s) \text{ f.s. } \forall s, t \in D_1$$

Damit definiert man

$$\dot{\phi}(t) := K_6 \tilde{\phi}(t) + F_2(t) + F_3(t), \quad \dot{\phi} \text{ ist } f_0\text{-meßbar und f.s. stetig;}$$

mit (3,8) (und (3,13) für  $\phi(X) = X$  läßt sich eine Diagonalfolge

$(n'') \subseteq (n')$  konstruieren, so daß  $F_{n'',2}(t) \rightarrow F_2(t)$  f.s.  $\forall t \in D_1$

und  $F_{n'',3}(t) \rightarrow F_3(t)$  f.s.  $\forall t \in D_1$ . Aus (3.18) folgt dann

$$\lim_{n'' \rightarrow \infty} \int_s^t \|\tilde{B}_n^\phi(\tau)\| \leq \dot{\phi}(t) - \dot{\phi}(s) \text{ f.s. } \forall s, t \in D_1$$

Satz II. 10 liefert dann b)

c) Folgt sofort aus b), da Voraussetzungen II. 3 und 4 für

$$Y_{n,0} = Y_0 = I \text{ und } h_n(t, x, y) = h_0(t, x, y) = y \text{ erfüllt sind.}$$

d) Für Teil a) Bemerkung II. 8 b), für Teile b) und c) folgt dies

mit Satz II. 10

Als Illustration soll der Satz angewendet werden auf Summen infinitesimaler Zufallsvariablen. Sei ein Dreiecksschema gegeben wie in Kapitel I:

$$\{X_{n,j}, f_{n,j}\}_{n,j} \text{ und Stoppzeiten } \{T_{n,j}\}_{n,j}.$$

Der Prozeß  $X$  und die stochastische Basis  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  wie zu Beginn von Kapitel II,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_0 \cap \bigcap_{j \geq 0} \mathcal{F}_{n,0}$ .

Überträgt man nun die Voraussetzung II. 1 und 2 für für das Dreiecksschema, so ergibt sich

### Voraussetzung 2

Die lokalen Charakteristiken  $(\tilde{B}, C, \nu)$  von  $X$  sind wie in

Voraussetzung II. 1 verlangt.

$$i) \quad \max \{ P(|X_{n,j}| > \varepsilon \mid \mathcal{F}_{n,j-1}) \mid j=1, \dots, k_n(t) \} \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t, \varepsilon > 0$$

$$ii) \quad P_n(\cdot \times [0, t]) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} P(X_{n,j} \in \cdot \mid \mathcal{F}_{n,j-1}), \text{ es gilt}$$

$$P_n(\cdot \times [0, t]) \Big|_{|X| > \delta} \xrightarrow{w} \nu(\cdot \times [0, t]) \Big|_{|X| > \delta} \text{ n.W. } \forall t \in D_1 \text{ und}$$

$$\delta \text{ mit } \nu(\partial \{|X| \leq \delta\} \times [0, t]) = 0 \text{ f.s. } \forall t$$

$$iii) \quad b_n(p, q, p', q')(t) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} E(f(p, q)(X_{n,j}) f(p', q')(X_{n,j}) \mid \mathcal{F}_{n,j-1}),$$

$$\text{es gilt } b_n(p, q, p', q')(t) \rightarrow C(p, p, p', q')(t) +$$

$$+ \int f(p, q)(X) f(p', q')(X) \nu(dx \times [0, t]) \text{ n.W. } \forall t \in D_1; p, q, p', q'$$

$$iv) \quad \sup_{s \leq t} \left| \sum_{j=1}^{k_n(s)} E(f(X_{n,j}) \mid \mathcal{F}_{n,j-1}) - \tilde{B}(s) \right| \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall t \in D_1$$

$$v) \quad \text{Zu jeder Teilfolge } (n') \subseteq (n) \text{ gibt es eine Teilfolge } (n'') \subseteq (n')$$

$$\text{und einen } \mathcal{F}_0\text{-meßbaren, f.s. stetigen Prozeß } \hat{\phi} \text{ mit}$$

$$\lim_{n''} \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} |E(f(X_{n,j}) \mid \mathcal{F}_{n,j-1})| \leq \hat{\phi}(t) - \hat{\phi}(s) \text{ f.s. } \forall s, t \in D_1$$

1.6. Folgerung Ist  $\phi$  dreimal stetig differenzierbar,  $\phi(0) = 0$  und

Voraussetzung 2 erfüllt, dann gilt:

$$\left( \sum_{j=1}^{k_n(\cdot)} \phi(X_{n,j}), \sum_{j=1}^{k_n(\cdot)} (I + \phi(X_{n,j})) \right) \xrightarrow{D} (X^\phi(\cdot), Y^\phi(0, \cdot))$$

### Beweis

Man setzt  $f_t^n := f_{n(k_n(t))}$ , damit hat man (siehe [22], Théorème (2.41):

$$B_n(t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} E(f(X_{n,j}) \mid f_{n,j-1}), C_n \equiv 0, v_n \equiv p_n,$$

Nach Bemerkung zu Voraussetzung II. 1 ii) ist  $\sum_{s \leq t} \|\Delta \tilde{B}_n(t)\|^2 \rightarrow 0$  n.W.  $\forall t$ ;

mit Satz 1.5 c) folgt die Behauptung, da  $X_n^\phi(t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} \phi(X_{n,j})$

Eine andere Anwendungsmöglichkeit von Satz 1.5 sind Stabilitätsaussagen für deterministische Integralgleichungen.

Ist  $B$  ein deterministischer Prozeß von beschränkter Variation, dann ist

$B$  ein Semimartingal. Ist  $A_0 \in M^M$ , so gibt es ein Semimartingal  $A$ , das

(DJ)  $A(t) = A_0 + \int_{]0,t]} h(s, B(s-), A(s-)) dB(s)$  löst, damit ist  $A$  eine

cadlag-Funktion von beschränkter Variation.

### Voraussetzung 3

i)  $A_{n,0}, A_0 \in M^M, \|A_{n,0} - A_0\| \rightarrow 0$

ii)  $h_{n,0}, h_0$  erfüllen Voraussetzung II.3

iii)  $B_n$  cadlag-Funktionen von beschränkter Variation mit

$B_n(0) = 0 \forall n; B_t = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(t) \forall t \in D_1$  existiert zu jeder Teilfolge

$(n') \subset (n)$  gibt es eine Teilfolge  $(n'') \subset (n')$  und ein stetiges  $\hat{\phi}$  mit

$$\overline{\lim}_{n''} \int_s^t \|dB_n(\tau)\| \leq \hat{\phi}(t) - \hat{\phi}(s) \forall s, t \in D_1$$

### 1.7 Folgerung

Ist Voraussetzung 3 erfüllt,  $a_n$  die zu  $(A_{n,0}, B_n, h_n)$  gehörende Lösung

von (DJ); dann gibt es eine stetige Funktion  $B$  von beschränkter Variation

mit  $B(t) = B_t \forall t \in D_1$  und  $\sup_{s \leq t} \|B_n(s) - B(s)\| \rightarrow 0 \forall t$ ;

ist  $A$  die zu  $(A_0, B, h_0)$  gehörende Lösung von (DJ), dann gilt

$\sup \|A_n(s) - A(s)\| \rightarrow 0 \forall t, A$  ist stetig und von beschränkter Variation.

Beweis: o.E.  $s = 0$

(3.19) Satz A. B

$$a) \quad \sup_n \|X_n(0)\| < \infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ s, t \leq T}} \|X_n(t) - X_n(s)\| = 0 \quad \forall T$$

$\Rightarrow$  zu jeder Teilfolge  $(n')$   $\stackrel{C}{\subset}$   $(n)$  gibt es eine Teilfolge  $(n'')$   $\stackrel{C}{\subset}$   $(n')$

und ein stetiges  $X$  mit  $\sup_{s \leq t} \|X_{n''}(s) - X(s)\| \rightarrow 0 \quad \forall t$

b)  $X_n(\cdot)$  reelwertig, nichtfallend  $\forall n$ ,  $X$  stetig mit

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (X_n(t) - X_n(s)) \leq X(t) - X(s) \quad \forall s, t \in D_1, s \leq t \text{ (wobei } D_1$$

$$\text{dicht in } R_+) \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ s, t \leq T}} |X_n(t) - X_n(s)| = 0 \quad \forall T$$

setze  $X_n(t) := \int_0^t dB_n(s)$ ; mit Voraussetzung 3 iii) und (3.19) b):

$$(3.20) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|s-t| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \int_s^t |dB_n(\tau)| = 0$$

$$\text{wegen } \|B_n(t) - B_n(s)\| \leq \int_s^t |dB_n(\tau)| \text{ folgt}$$

$$(3.21) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|s-t| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \|B_n(t) - B_n(s)\| = 0$$

Nach (3.19) a) gibt es ein stetiges  $B$  mit  $\sup_{s \leq t} \|B_{n''}(s) - B(s)\| \rightarrow 0$ ,

nach Voraussetzung 3 iii) ist  $B(t) = B_t \quad \forall t \in D_1$ , d.h.  $B$  ist eindeutig

bestimmt, also:  $(B_n)_n$  relativ kompakt gzgl. der gleichmäßigen Konvergenz

und alle Häufungspunkte identisch und stetig, damit gibt es ein  $B$ , stetig

mit

$$(3.22) \quad \sup_{s \leq t} \|B_n(s) - B(s)\| \rightarrow 0 \quad \forall t$$

mit Voraussetzung 3 iii) folgt daraus für  $s_0 < \dots < s_x \leq t$

$$\sum_{l=1}^x \|B(s_l) - B(s_{l-1})\| \leq \int_0^t d\hat{\phi}(\tau) = \hat{\phi}(t) - \hat{\phi}(0), \text{ also}$$



$$(3.23) \quad \int_0^t \| dB(s) \| \leq \hat{\phi}(t) - \hat{\phi}(0)$$

Aus (3,20) folgt noch

$$(3.24) \quad \sup_{s \leq t} \| \Delta B_n(s) \| + 0 \sum_{s \leq t} \| \Delta B_n(s) \|^2 \rightarrow 0$$

Man bestimmt nun die lokalen Charakteristiken von  $B_n$  und  $B$ .

Offensichtlich ist  $C_n \equiv C \equiv 0$  und, da  $B$  stetig ist,  $v \equiv 0$ ; damit ist

$$\tilde{B}(t) = B(t) \quad \forall t.$$

$$\mu_n(A \times ds) = \nu_n(A \times ds) = \sum_s \delta(\Delta B_n(s), s) (A \times ds), \text{ also wird}$$

$$x_n^e(t) = B_n(t) - \sum_{s \leq t} (\Delta B_n(s) - f(\Delta B_n(s)))$$

zu zeigen bleibt, daß die Voraussetzungen II. 1 und 2 erfüllt sind.

Zu II. 1 i) und ii):

$$\text{für alle } \epsilon > \nu_n(\{ \|x\| > \epsilon \} \times [0, t]) > 0$$

$$\Rightarrow \sup_{s \leq t} \| \Delta B_n(s) \| > \epsilon \text{ aus (3.24) folgt dann die Konvergenz gegen 0}$$

Zu II. 1 iii):

$$C_n \equiv C \equiv 0, \quad v \equiv 0, \quad \int f(p, q)(x) f(p', q')(x) \nu_n(dx \times [0, t]) =$$

$$= \sum_{s \leq t} f(p, q)(\Delta B_n(s)) f(p', q')(\Delta B_n(s)) =$$

$$= \sum_{s \leq t} \int f(p, q)(x) \nu_n(dx \times \{s\}) \int f(p, q)(x) \nu_n(dx \times \{s\})$$

Zu II 1 iv):

$$\sup_{s \leq t} \| B_n(t) - B_n(s) \| \neq 0 \Rightarrow \sup_{s \leq t} \| \Delta B_n(s) \| > \frac{1}{2} \text{ also mit (3.24)}$$

$$\text{und (3.22) : } \sup_{s \leq t} \| B_n(s) - B(s) \| \rightarrow 0 \quad \forall t$$

Zu II. 2:

$$\int_s^t \| dB_n(\tau) \| \leq \int_s^t \| dB_n(\tau) \| + 2 \int_s^t \| x \| 1_{\|x\| > \frac{1}{2}} \nu_n(dx \times ]s, t]);$$

$$\int \| x \| 1_{\|x\| > \frac{1}{2}} \nu_n(dx \times [0, t]) \neq 0 \Rightarrow \sup_{s \leq t} \| \Delta B_n(s) \| > \frac{1}{2}$$

mit (3.24) und Voraussetzung 3 iii) folgt damit, daß II. 2 erfüllt ist.

Nach Satz 1.5 b) folgt:  $(B_n, A_n) \xrightarrow{D} (B, A)$  und  $A$  ist die zu  $(A_0, B, h_0)$  gehörende Lösung von (DJ).

Nach 1.5 d) ist  $A$  stochastisch stetiges Semimartingal, damit muß  $A$  stetig und von beschränkter Variation sein. Aus der Verteilungskonvergenz

$(B_n, A_n) \rightarrow (B, A)$  folgt die Konvergenz in der Skorahod-Topologie, da nur deterministische Prozesse vorliegen; da  $B$  und  $A$  stetig sind, folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz.

### 1.8 Folgerung

Ist  $(A_n(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2} \subseteq \mathbb{M}^M$ , eine Folge von Operator-Hemigruppen von

beschränkter Variation und die zugehörigen integrierenden Prozesse

$B_n$  erfüllten die Voraussetzung 3 iii), dann gilt: Es gibt eine stetige

Funktion  $B$  von beschränkter Variation mit  $\sup |B_n(s) - B(s)| \rightarrow 0 \forall t$ ,

für die zu  $B$  gehörige Operator-Hemigruppe  $(A(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2}$

gilt  $\sup_{s \leq t \leq T} |A_n(s, t) - A(s, t)| \rightarrow 0 \forall s \leq T$ ,

$A$  ist von beschränkter Variation und stetig.

### Beweis:

Die Behauptungen über  $B$  und  $A(0, t)$  ergeben sich aus Folgerung 1.7. Für

$s > 0$  setzt man  $B'_n(s, t) = B_n(t) - B_n(s)$ ,  $t \geq s$  zu  $B_n(t)$  gehört auf

$(s, \infty)$  die gleiche Lösung von  $A_n(s, t) = I + \int_{[s, t]} A_n(s, \tau-) d B'_n(s, \tau)$ ,

erfüllt die Voraussetzung 3 iii), mit Folgerung 1.7 ergibt sich die Behauptung.

### 1.9 Bemerkung

Wegen Satz A. 8 (siehe 3.19) kann man anstatt 3 iii) auch fordern 3 iii')

$B_n$  cadlag-Funktionen von beschränkter Variation mit  $B_n(0) = 0 \forall n$ ,  $B_t =$

$\lim_n B_n(t) \forall t \in D_1$  existiert;  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t \\ |t-s| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \int_s^t |d B_n(\tau)| = 0 \forall T$

## § 2 Verteilungskonvergenz auf lokalkompakten Moore-Gruppen

Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe, die Verknüpfung geschrieben als Multiplikation.

### 2.1 Definition

Eine (stetige, unitäre) Darstellung  $U = (U, H(U))$  ist ein Homomorphismus von  $G$  in die Gruppe der unitären Operatoren auf dem (komplexen) Hilbertraum  $H(U)$ , so daß die Abbildung  $G \rightarrow U(g) \cdot u$  stetig ist für alle  $u \in H(U)$ .

Skalarprodukt und Norm auf  $H(U)$  werden mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bzw.  $\| \cdot \|$  bezeichnet. Für  $u, v \in H(U)$  heißt die Funktion  $k_{u,v} : G \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $k_{u,v}(g) := \langle U(g)u, v \rangle$  die Koeffizientenfunktion von  $U$ . Man bezeichnet mit  $\text{Rep}(G)$  die Klasse aller Darstellungen von  $G$ . Sind  $D_1, D_2 \in \text{Rep}(G)$ , dann ist  $D_1 \oplus D_2$  die direkte Summe,  $D_1 \otimes D_2$  das Tensorprodukt.

### 2.2 Definition

Eine Darstellung  $U \in \text{Rep}(G)$  heißt irreduzibel, falls der einzige abgeschlossene, unter  $U$  invariante Unterraum von  $H(U)$  gleich  $\{0\}$  ist. Sei  $\text{Irr}(G)$  die Klasse der irreduziblen Darstellungen.  $G$  heißt eine Moore-Gruppe, falls alle irreduziblen Darstellungen von  $G$  endlichdimensional sind.

Man bezeichnet mit  $C^b(G)$  den Raum der stetigen, beschränkten, komplexwertigen Funktionen auf  $G$  mit der Supremums-Norm  $\| \cdot \|_{\infty}$ .  $K(G)$  bzw.  $C^0(G)$  sind die Unterräume der Funktionen mit kompaktem Träger bzw. die im Unendlichen verschwunden.

$\mathbb{M}(G)$  ist der Raum der reellen Radon-Maße auf  $G$ ,  $\mathbb{M}^b(G)$  der Unterraum der beschränkten Maße mit der Norm

$\| \mu \| := \sup \{ \left| \int f d\mu \right| \mid f \in K(G), \| f \| \leq 1 \}$ ,  $\mathbb{M}^1(G)$  die Teilmenge der Wahrscheinlichkeitsmaße.  $\mathbb{M}_+^b(G)$  die Teilmenge der positiven Maße.

### 2.3 Definition

Für  $\mu \in \mathbb{M}^b(G)$  definiert man die Fourier-Transformierte  $\hat{\mu}$  durch  
 $\langle \hat{\mu}(U) u, v \rangle := \int \langle U(g) u, v \rangle \mu(dg)$  für alle  $U \in \text{Rep}(G)$ ,  $u, v \in H(U)$ ;  
 Die Fourier-Transformierte hat folgende Eigenschaften (siehe (29),  
 Kap. I. 1) :

#### (3.25)

- i)  $\hat{\mu}(U)$  ist ein beschränkter, linearer Operator auf  $H(U)$  mit  

$$\|\hat{\mu}(U)\| \leq \|\mu\|$$
- ii) Die Abbildung  $\mu \rightarrow \hat{\mu}$  ist injektiv, insbesondere gilt:  

$$\hat{\mu}_1(U) = \hat{\mu}_2(U) \quad \forall U \in \text{Irr}(G) \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$$
- iii)  $(a, \mu_1 + b, \mu_2)^\wedge(U) = a, \hat{\mu}_1(U) + b, \hat{\mu}_2(U) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, U \in \text{Rep}(G)$
- iv)  $(\mu_1 * \mu_2)^\wedge(U) = \hat{\mu}_1(U) \hat{\mu}_2(U) \quad \forall U \in \text{Rep}(G)$  (wobei  $\mu_1 * \mu_2$  die Faltung von  $\mu_1$  und  $\mu_2$  bezeichnet.)
- v) (Stetigkeitssatz) Die Abbildung  $\mu \rightarrow \hat{\mu}$  ist folgenstetig, d.h. für  $(\mu_n)_{n \geq 0} \leq \mathbb{M}^1(G)$  sind die drei Aussagen a), b), c) äquivalent:
  - a)  $\mu_n \rightarrow \mu_0$
  - b)  $\hat{\mu}_n(U) u \rightarrow \hat{\mu}_0(U) u \quad \forall U \in \text{Irr}(G), u \in H(U)$
  - c)  $\langle \hat{\mu}_n(U) u, v \rangle \rightarrow \langle \hat{\mu}_0(U) u, v \rangle \quad \forall U \in \text{Irr}(G), u, v \in H(U)$

### 2.4 Definition

Eine Familie  $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2} \subset \mathbb{M}(G)$  heißt eine Hemigruppe, falls

- i)  $\mu(s, t) * \mu(t, r) = \mu(s, r) \quad \forall s \leq t \leq r$
- ii)  $\mu(s, s) = \delta_1 \quad \forall s$
- iii) Die Hemigruppe heißt stetig, falls die Abbildung  $(s, t) \rightarrow \mu(s, t)$  stetig ist (bzgl. der schwachen Topologie).

Mit (3.25) iv) ergibt sich, daß die Fourier-Transformierten  $\hat{\mu}(s, t)(U)$  eine Operator-Hemigruppe bildet, die stetig ist, falls  $\mu(s, t)$  das ist.

Falls  $\hat{\mu}(s, t)$  (U) von beschränkter Variation ist, existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte, deshalb kann an 0 B dA annehmen:

3.26)  $\hat{\mu}(s, t)$  (U) ist cadlag in jeder Variablen, falls es von beschränkter Variation ist.

Nach Satz 1.2 gehört zu  $\hat{\mu}(s, t)$  (U) dann eine cadlag-Funktion  $\phi(t)$  (U) von beschränkter Variation, so daß

$$(EV1) \hat{\mu}(s, t) (U) = I + \int_{]s, t]} \hat{\mu}(s, \tau-) (U) \phi(d\tau) (U)$$

Will man nun die Konvergenzsätze des letzten Paragraphen anwenden, so muß man beachten, daß dort nur endliche Matrizen behandelt werden, das bedeutet, daß man damit nur endlichdimensionale Darstellungen untersuchen kann, also muß  $G$  eine Moore-Gruppe sein.

Ein weiterer Punkt ist, daß die Darstellungen komplexe Matrizen sind, d.h. aus  $IM(M, \mathbb{C})$  für ein  $M$ , aber bisher nur reelle Matrizen behandelt wurden. Dazu definiert man:

$Z = u + i v \in \mathbb{C}$  läßt sich identifizieren mit  $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \in IM^2$ , man definiert also eine Abbildung  $J_M : IM(M, \mathbb{C}) \rightarrow IM^{2M}$  durch

$$J_M \left( \begin{pmatrix} z_{r,j} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u_{r,j} & -v_{r,j} \\ v_{r,j} & u_{r,j} \end{pmatrix}, \text{ wo } z_{r,j} = u_{r,j} + i v_{r,j}$$

Dann ist  $J_M$  eine lineare, injektive Abbildung mit

$$(3.27) \quad \begin{aligned} J_M(D_1 \cdot D_2) &= J_M(D_1) J_M(D_2) \quad \forall D_1, D_2 \in IM(M, \mathbb{C}) \\ \|J_M(D)\| &= 2 \|D\| \quad \forall D \in IM(M, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Damit formuliert man den folgenden

## 2.5 Satz

Sei  $G$  eine Moore-Gruppe,  $(\mu_n(\cdot, \cdot))_{n \geq 0}$  eine Folge von Hemigruppen, so daß für jedes  $U \in \text{Irr}(G)$  gilt:  $\mu_n(s, t)$  (U) ist von beschränkter Variation  $\forall n \geq 0$ , für die zugehörigen integrierenden Prozesse  $\phi_n(t)$  (U) ist  $\phi_n(0)$  (U) = 0  $\forall n$ ,  $\phi_0(t)$  (U) =  $\lim_n \phi_n(t)$  (U) existiert  $\forall t \in D_1$ , zu jeder

Teilfolge  $(n') \subseteq (n)$  gibt es eine Teilfolge  $(n'') \subseteq (n')$  und ein stetiges  $\hat{\phi}(\cdot)(U)$ , so daß

$$\lim_{n''} \int_s^t \phi_{n''}(\tau)(U) d\tau \leq \hat{\phi}(t)(U) - \hat{\phi}(s)(U) \quad \forall s, t \in D_1$$

dann folgt:  $\mu_n(s, t) \rightarrow \mu_0(s, t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+^2$  und  $(\mu_0(\cdot, \cdot))$  ist eine stetige Hemigruppe.

# Beweis:

$\mathcal{G}$  ist eine Moore-Gruppe, d.h. die irreduziblen Darstellungen sind endlich-dimensional. Sei also  $U \in \text{Irr}(\mathcal{G})$ ,  $\dim U = M$ ,

definieren  $A_n(s, t) := J_M(\hat{\mu}(s, t)(U))$ ,

$$\begin{aligned} J_M(\hat{\mu}(s, t)(U)) &= J_M\left(I_M \times \int_{[s, t]} \hat{\mu}(s, \tau)(U) \phi(d\tau)(U)\right) = \\ &= I_{2M} + \int_{[s, t]} J_M(\hat{\mu}(s, \tau)(U)) (J_M(\phi(d\tau)(U))) \end{aligned}$$

also ist der zu  $A_n(s, t)$  gehörende integrierende Prozeß

$B_n(t) = J_M(\phi_n(t)(U))$ ; mit (3,27) folgt dann aus der Voraussetzung über  $\phi_n(t)(U)$ , daß  $B_n(t)$  die Voraussetzung 3 iii) erfüllt. Mit Folgerung 1.18 ergibt sich dann insgesamt:  $\sup_{s \leq t} \|\phi_n(s)(U) - \phi_0(s)(U)\| = 0 \quad \forall t$  und

$\phi_0(s)(U)$  stetig;  $J_M(\bar{\mu}_0(s, t)(U))$  stetig also auch  $\hat{\mu}_0(s, t)(U)$  stetig und  $\sup_{s \leq t \leq T} \|J_M(\hat{\mu}_n(s, t)(U)) - J_M(\hat{\mu}_0(s, t)(U))\| =$   
 $2 \sup_{s \leq t \leq T} \|\hat{\mu}_n(s, t)(U) - \hat{\mu}_0(s, t)(U)\| \rightarrow 0 \quad \forall s \leq T$

Aus (3,25) v) folgt dann  $\mu_n(s, t) \xrightarrow{w} \mu_0(s, t)$ . Um zu zeigen, daß  $\mu_0(\cdot, \cdot)$  eine stetige Hemigruppe ist, wählt man eine Folge  $(s_n, t_n) \rightarrow (s, t)$ , dann gilt, da  $\hat{\mu}(s, t)(U)$  stetig ist,

$$\hat{\mu}(s_n, t_n)(U) \rightarrow \hat{\mu}_0(s, t)(U) \quad \forall U \in \text{Irr}(\mathcal{G})$$

mit 3.25 v) folgt dann  $\mu_0(s_n, t_n) \xrightarrow{w} \mu_0(s, t)$

Man kann Satz 2.5 am Beispiel von Dreiecksschemata von unabhängigen Zufallsvariablen illustrieren.

## 2.6 Folgerung

Sei  $\mathcal{G}$  eine More-Gruppe,  $\mu_0(\cdot, \cdot)$  eine Hemigruppe mit  $\hat{\mu}(s, t)(U)$  von beschränkter Variation und für die assoziierte Funktion  $\phi_0(t)(U)$  ist  $\phi_0(0)(U) = 0$  für alle  $U \in \text{Irr}(\mathcal{G})$ .  $k_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}_0$  sei cadlag mit  $k_n(0) = 0$ , wachsend,  $(\mu_{n,j})_{n,j} \subseteq \mathbb{M}^1(\mathcal{G})$  mit: für  $U \in \text{Irr}(\mathcal{G})$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n(t)} \left( \int U(g) \mu_{n,j}(dg) - I \right) = \phi_0(t)(U) \quad \forall t \in D_1, \text{ zu jeder}$$

Teilfolge  $(n') \subseteq (n)$  gibt es eine Teilfolge  $(n'') \subseteq (n')$  und ein stetiges  $\hat{\phi}(\cdot)(U)$ , so daß

$$\lim_{n'' \rightarrow \infty} \sum_{j=k_{n''}(s)+1}^{k_{n''}(t)} \left| \int U(g) \mu_{n'',j}(dg) - I \right| \leq \hat{\phi}(t)(U) - \hat{\phi}(s)(U) \quad \forall s, t \in D_1$$

dann folgt:  $\{ \mu_0(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$

ist eine stetige Hemigruppe und  $\mu_{n,j} \xrightarrow{j=k_n(s)+1} \mu_0(s, t) \quad \forall (s, t)$

Beweis:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n(s, t)(U) &= \int U(g) \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n,j}(dg) = \\ &= \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int U(g) \mu_{n,j}(dg) \Rightarrow \\ \phi_n(t)(U) &= \sum_{j=1}^{k_n(t)} \left( \int U(g) \mu_{n,j}(dg) - I \right) \end{aligned}$$

Mit Satz 2.5 folgt nun die Behauptung.

## 2.7 Bemerkung

a) Entsprechend Bemerkung 1.9 kann man anstelle der Bedingung "zu jeder Teilfolge  $(n') \subseteq (n) \dots$ " in Satz 2.5

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sup_{\substack{t \\ |t-s| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \int_s^t \left| \phi_n(d\tau)(U) \right| = 0 \quad \forall T$$

und in Folgerung 2.6

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sup_{\substack{t \\ |t-s| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int U(g) \mu_{n,j}(dg) - I \right| = 0 \quad \forall T$$

fordern.

b) Die Fourier-Transformierte läßt sich mit Hilfe des assoziierten Prozesses darstellen;

$$\hat{\mu}(s, t)(U) = I + \int_s^t \hat{\mu}(s, \tau-) \phi(d\tau)(U),$$

für die Variation von  $\hat{\mu}$  ergibt sich daraus wegen  $\|\hat{\mu}(s, t)(U)\|^2 \leq \dim H(U)$

$$(3.29) \quad \int_s^t \|\hat{\mu}(s, \cdot)(U) - I\|(d\tau) \leq M_U \cdot \int_s^t \|\phi(d\tau)(U)\| \quad \forall s, t$$

Wenn man die Hemigruppe  $(\mu_n(s, t))_{(s, t)}$  als Verteilung der Zuwächse eines Prozesses  $X_n(t)$  in  $\mathcal{G}$  betrachtet, so wäre in Satz 2.5 eine Aussage darüber gemacht, wann die endlichdimensionalen Verteilungen von  $X_n$  konvergieren. Als nächstes soll gezeigt werden, daß die dort gegebenen Bedingungen schon hinreichen für die Konvergenz von Prozessen (in Verteilung).

## 2.8 Satz

Ist  $(\mathcal{G}, d)$  eine vollständige, separable, metrische Moore-Gruppe;

$(\mu_0(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2}$  eine Hemigruppe, so daß  $\hat{\mu}_0(s, t)(U)$  von beschränkter

Variation mit dem assoziierten Prozeß  $\phi_0(t)(U)$  ist  $\forall U \in \text{Irr}(\mathcal{G})$ ;

$(X_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von  $\mathcal{G}$ -wertigen cadlag-Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen.  $\mu_n(s, t) := P X_n^{-1}(s) X_n(t)$ , für  $U \in \text{Irr}(\mathcal{G})$  ist  $\hat{\mu}_n(s, t)(U)$  von beschränkter Variation,  $\phi_n(t)(U)$  der assoziierte Prozeß,

$$i) \quad \phi_n(0)(U) = 0 \quad \forall n \geq 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)(U) = \phi_0(t)(U) \quad \forall t \in D_1$$

$$ii) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ t, s \leq T}} \int_s^t \|\phi_n(d\tau)(U)\| = 0 \quad \forall T$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt: Es gibt einen stochastisch stetigen Prozeß  $X_0$  mit unabhängigen Zuwächsen und  $X_n \xrightarrow{D} X_0$

## Beweis:

Aus (3.19) folgt, daß die Voraussetzungen von Satz 2.5 erfüllt sind. Damit ist  $X_0$  (falls er existiert) stochastisch stetig mit unabhängigen Zuwächsen



(da  $(s, t) \rightarrow \mu_0(s, t)$  stetig ist). Man wendet das folgende Theorem VI. 5.4 aus [19] an:

Satz:

(3.30)  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  eine Folge separabler Markon-Prozesse auf  $[0, T]$ ,

$$\alpha_n(\delta, \epsilon) := \sup \{ P(d(\xi_n(t), X) > \epsilon \mid \xi_n(s) = X) \mid 0 \leq t - s \leq \delta, X \in \mathcal{G} \}$$

i) Für die in  $[0, T]$  dichte Menge  $D_1$  mit  $\tau, T \in D_1$  gilt

$$t_1, \dots, t_k \in D_1 \quad \bigwedge_{t_1, \dots, t_k} \bigvee_{\mu_{t_1, \dots, t_k}} (\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_k)) \not\rightarrow \mu_{t_1, \dots, t_k}$$

ii)  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\delta, \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$

Dann folgt: Es gibt einen Prozeß  $\xi_0$  mit  $\xi_n \rightarrow \xi_0$  (auf  $[0, T]$ )

Sei  $T \in D_1$ ; wegen Satz 2.5 muß nur noch ii) von (3.30) nachgewiesen werden.

Da es auf  $\mathcal{G}$  eine linksinvariante Metrik gibt, die die Topologie erzeugt,

sei  $d$  diese Metrik.

$$\begin{aligned} P(d(X_n(t), X) > \epsilon \mid X_n(s) = X) &= \\ &= P(d(X_n^{-1}(s) X_n(t), e) > \epsilon \mid X_n(s) = X) = \\ &= P(d(X_n^{-1}(s) X_n(t), e) > \epsilon) = \mu_n(s, t) \{g \mid d(g, e) > \epsilon\} = \\ &= \int 1_{\{d(g, e) > \epsilon\}} \mu_n(s, t)(dg) \end{aligned}$$

Da  $\mathcal{G}$  lokalkompakt ist, gibt es ein  $\delta_0$ , so daß

$$\{g \mid d(g, e) \leq \delta\} \text{ kompakt ist } \forall \delta \leq \delta_0, \text{ o. E. } \epsilon < \frac{1}{2} \delta_0;$$

es gibt eine stetige Funktion  $f$  mit  $0 \leq f(g) \leq 1$ ,

$$f(g) = \begin{cases} 1, & d(g, e) \leq \frac{\epsilon}{2}; \text{ damit ist} \\ 0, & d(g, e) > \epsilon \end{cases}$$

$P(d(X_n(t), X) > \epsilon \mid X_n(s) = X) \leq 1 - \int f(g) \mu_n(s, t)(dg)$ ; ist  $K$  eine (später zu bestimmende) kompakte Menge, dann gibt es zu jedem  $\eta > 0$  ein

$$\text{trigonometrisches Polynom } p(g) = \sum_{r=1}^1 a_r \langle U_r(g) u_r, v_r \rangle \text{ mit } U_r \in \text{Irr}(\mathcal{G})$$

$\sup_{g \in K} |f(g) - p(g)| \leq \eta$  (da nach [10] S.14 die trigonometrischen Polynome

mit endlichdimensionalen  $U_x$  die Punkte von  $\mathcal{G}$  trennen (da  $\mathcal{G}$  eine Moore-Gruppe, also fast periodisch ist, [10] S. 15), die Algebra der trigonometrischen Polynome, die Koeffizientenalgebra, nach dem Satz von Stone-Weierstraß also auf jeder kompakten Menge dicht in den stetigen Funktionen ist; o. E. kann man natürlich jedes trigonometrische Polynom mit irreduziblen Darstellungen schreiben). Damit ergibt sich dann

$$(3.31) \quad \begin{aligned} & P(d(X_n(t), X) > \varepsilon \mid X_n(s) = X) \leq \\ & \leq \int (p - f) 1_K d\mu_n(s, t) + \int (p(e) - p) 1_K d\mu_n(s, t) + \\ & + (1 - p(e)) \mu_n(s, t)(K) + \mu_n(s, t)(\mathcal{G} \setminus K) \end{aligned}$$

Man schätzt nun die Summanden in (3.31) ab.

a)  $\{\mu_n(s, t) \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq t \leq T\}$  ist straff

Beweis a) Da  $\mathcal{G}$  vollständiger, separabler metrischer Raum ist, genügt es, die relative Kompaktheit nachzuweisen. Sei also  $(\mu_n(s_n, t_n))_n$  eine Folge o. E.  $(s_n, t_n) \rightarrow (s_0, t_0)$ , sonst wählt man eine solche Teilfolge aus. Es genügt  $\hat{\mu}_n(s_n, t_n)(U) \rightarrow \hat{\mu}_0(s_0, t_0)(U) \forall U \in \text{Irr}(\mathcal{G})$  zu zeigen. Wegen Satz 2.5 gilt  $\hat{\mu}_n(s_0, t_0)(U) \rightarrow \hat{\mu}_0(s_0, t_0)(U) \forall U \in \text{Irr}(\mathcal{G})$ , zu zeigen bleibt  $\|\hat{\mu}_n(s_n, t_n)(U) - \hat{\mu}_n(s_0, t_0)(U)\| \rightarrow 0$ .

Aufgrund der Voraussetzungen ist  $\hat{\mu}_n$  Lösung von (EV1), wenn man also

0 B d A  $s_n \leq s_0 \leq t_0 \leq t_n$  annimmt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \hat{\mu}_n(s_n, t_n)(U) - \hat{\mu}_0(s_0, t_0)(U) = \\ & = \int_{s_n}^{s_0} \hat{\mu}_n(s_n, \tau^-)(U) \phi_n(d\tau)(U) + \int_{t_0}^{t_n} \hat{\mu}_n(t_0, \tau^-)(U) \phi_n(d\tau)(U) \\ & \quad - \int_{t_0}^{t_n} \hat{\mu}_n(t_0, \tau^-)(U) \phi_n(d\tau)(U) + \int_{s_n}^{s_0} \hat{\mu}_n(s_n, \tau^-)(U) \phi_n(d\tau)(U) \\ & \quad - \int_{s_n}^{s_0} \hat{\mu}_n(s_n, \tau^-)(U) \phi_n(d\tau)(U) \\ & \quad \leq K_1 \cdot \int_{t_0}^{t_n} \|\phi_n(d\tau)(U)\| \\ & \quad \leq K_1 \cdot \int_{s_n}^{s_0} \|\phi_n(d\tau)(U)\| \end{aligned}$$

Aus Voraussetzung ii) folgt damit

$$\|\hat{\mu}_n(s_n, t_n)(U) - \hat{\mu}_0(s_0, t_0)(U)\| \rightarrow 0$$

$$b) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ s, t \leq T}} \left| \int (p(e) - p) d\mu_n(s, t) \right| = 0 \text{ f\"ur jedes}$$

trigonometrische Polynom  $p$ .

Beweis b)

Da man  $p(g) = \sum_{r=1}^l a_r \langle U_r(g) u_r, v_r \rangle$ ,  $U_r \in \text{Irr } (\mathcal{G})$  schreiben kann,

zeigt man die Behauptung für  $p(g) = \langle U(g) u, v \rangle$  mit  $U \in \text{Irr } (\mathcal{G})$ .

$$\left| \int (p(e) - p) d\mu_n(s, t) \right|^2 = \left| \langle (I - \hat{\mu}_n(s, t)(U)) u, v \rangle \right|^2 \leq \\ \leq \| I - \hat{\mu}_n(s, t)(U) \|^2 \| u \|^2 \| v \|^2, \text{ zu zeigen ist}$$

$$(3,32) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \| I - \hat{\mu}_n(s, t)(U) \| = 0$$

Wegen der Voraussetzung erfüllt  $\hat{\mu}_n(s, t)(U)$  die Gleichung (EV1) also

$$I - \hat{\mu}_n(s, t)(U) = - \int_s^t \hat{\mu}_n(s, \tau)(U) \phi_n(d\tau)(U) \Rightarrow$$

$$\| I - \hat{\mu}_n(s, t)(U) \| \leq \dim H(U) \cdot \int_s^t \| \phi_n(d\tau)(U) \|^2$$

Aus Voraussetzung ii) folgt (3,31), also b).

Sei also  $\eta > 0$  beliebig; man wählt eine kompakte Menge  $K'$ , so daß

$$\mu_n(s, t)(K') \geq 1 - \eta \quad \forall n, \quad 0 \leq s \leq t \leq T \text{ (nach a) möglich);}$$

$K := K' \cup \{g \mid d(g, e) \leq \delta_0\}$  ist kompakt und

$\mu_n(s, t)(\mathcal{G} \setminus K) \leq \eta \quad \forall n, \quad 0 \leq s \leq t \leq T$ . Man wählt nun ein trigono-

metrisches Polynom  $p$  mit  $\sup_{g \in K} |p(g) - f(g)| \leq \eta$ , dann gilt

$$\left| \int (p - f) 1_K d\mu_n(s, t) \right| \leq \eta \quad \text{und wegen } f(e) = 1$$

$$\left| (1 - p(e)) \mu_n(s, t)(K) \right| \leq \eta \quad \forall n, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Nach b) gibt es ein  $\delta$  und ein  $n_0$ , so daß

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ s, t \leq T}} \left| \int (p(e) - p) d\mu_n(s, t) \right| \leq \eta \quad \forall n \geq n_0.$$

Damit folgt nun insgesamt wegen (3.31):

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ s, t \leq T}} P(d(X_n(t), X) > \varepsilon \mid X_n(s) = X) \leq 4n \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{also } \alpha_n(\delta, \varepsilon) \leq 4n \quad \forall n \geq n_0.$$

Damit gilt ii) aus (3.30) und somit Satz 2.8.

Aus Satz 2.8 läßt sich leicht ein Grenzverteilungssatz für Dreiecks-schemata ableiten:

## 2.9 Folgerung

Ist  $(G, d)$  eine vollständige, separable, metrische Moore-Gruppe,

$(\mu_0(s, t))_{(s, t) \in R_+^2}$  eine Hemigruppe, so daß für  $U \in \text{Irr}(G)$   $\hat{\mu}_0(s, t)(U)$

von beschränkter Variation mit assoziiertem Prozeß  $\phi_0(t)(U)$  ist,

$\phi_0(0)(U) = 0$ .  $K_n: R_+ \rightarrow N_0$  cadlag, wachsend mit  $K_n(0) = 0$ .

$(G_{n,j})_{n,j}$  zeilenweise unabhängige,  $G$ -wertige Zufallsvariable mit

$$i) \quad \phi_0(t)(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{K_n(t)} (E U(G_{n,j}) - I) \quad \forall t \in D_1$$

$$ii) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ s, t \leq T}} \sum_{j=K_n(s)+1}^{K_n(t)} \|E U(G_{n,j}) - I\| = 0 \quad \forall T$$

für alle  $U \in \text{Irr}(G)$ , dann gilt: Es gibt einen stochastisch stetigen

Prozeß  $X_0$  mit unabhängigen Zuwächsen und  $\sum_{j=1}^{K_n(\cdot)} G_{n,j} \xrightarrow{D} X_0(\cdot)$ ,

## Beweis

Definiere  $X_n(t) := \sum_{j=1}^{K_n(t)} G_{n,j}$ , dann ist

$$\mu_n(s, t) = \sum_{j=K_n(s)+1}^{K_n(t)} G_{n,j}, \quad \hat{\mu}_n(s, t)(U) = \sum_{j=K_n(s)+1}^{K_n(t)} E U(G_{n,j})$$

$$\phi_n(t)(U) = \sum_{j=1}^{K_n(t)} (E U(G_{n,j}) - I), \text{ mit Satz 2.8}$$

folgt die Behauptung.

In den Konvergenzaussagen werden bis jetzt immer die Existenz der Grenzverteilung vorausgesetzt. Der Grund dafür ist, daß man aus der punktweisen Konvergenz der Fourier-Transformierten nicht schließen kann, daß die Grenzfunktion die Fourier-Transformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist. Wie im Reellen muß man auch hier noch eine Stetigkeitsvoraussetzung machen. Dazu definiert man die kompakt offene Topologie auf  $\text{Rep}(\mathbb{G})$  ([10], S. 45).

Sei  $n \geq 1$ ,  $\text{Rep}_n(\mathbb{G}) := \{ U \in \text{Rep}(\mathbb{G}) \mid \dim H(U) = n \}$ , für  $U \in \text{Rep}_n(\mathbb{G})$ ,  $K \subseteq \mathbb{G}$  kompakt und  $\varepsilon > 0$  setzt man

$$W(U, K, \varepsilon) := \{ U' \in \text{Rep}_n(\mathbb{G}) \mid \|U(g) - U'(g)\| < \varepsilon \forall g \in K \},$$

$$\mathbb{W}(U) := \{ W(U, K, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0, K \subseteq \mathbb{G} \text{ kompakt} \},$$

$$\mathbb{W} := \{ \mathbb{W}(U) \mid U \in \text{Rep}_n(\mathbb{G}) \}$$

Die Familie  $\mathbb{W}$  bildet die Basis der Topologie auf  $\text{Rep}_n(\mathbb{G})$ ,  $\text{Rep}_0(\mathbb{G})$  bezeichnet die (disjunkte) topologische Summe der Räume  $\text{Rep}_n(\mathbb{G})$ .  $\text{Rep}_0(\mathbb{G})$  ist die Menge der endlichdimensionalen Darstellungen aus  $\text{Rep}(\mathbb{G})$ .

Nach [10], Theorem 1.4.5 und Definition 1.4.1 gilt für eine Moore-Gruppe  $\mathbb{G}$ :

$$(3.33) \quad \begin{aligned} & (\mu_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{M}_+^b(\mathbb{G}), \phi: \text{Rep}_0(\mathbb{G}) \rightarrow \bigcup_n \mathbb{M}(n, \mathbb{C}) \text{ stetig} \\ & \bar{\mu}_n(U) \rightarrow \phi(U) \forall U \in \text{Rep}_0(\mathbb{G}) \Rightarrow \text{es gibt ein} \\ & \mu_0 \in \mathbb{M}_+^b(\mathbb{G}) \text{ mit } \mu_n \rightarrow \mu_0 \text{ und } \hat{\mu}_0 = \phi \end{aligned}$$

Wenn eine Folge  $(\mu_n(\cdot, \cdot))_{n \geq 1}$  von Hemigruppen in  $M^1(\mathbb{G})$  gegeben ist mit Fourier-Transformierten  $\hat{\mu}_n(s, t)(U)$  und den assoziierten Prozessen  $\phi_n(t)(U)$ , so sagt Folgerung 1.7, falls die  $\phi_n$  die Voraussetzung 3 iii) erfüllen, dann gibt es ein  $\phi(t)(U)$  von beschränkter Variation, stetig auf  $\mathbb{R}_+$  und eine assoziierte Hemigruppe  $\phi(s, t)(U)$  mit  $\hat{\mu}_n(s, t)(U) \rightarrow \phi(s, t)(U)$ . Es bleibt die Frage, unter welchen Bedingungen für  $\phi$  die Funktion  $\phi(s, t)$  stetig auf  $\text{Rep}_0(\mathbb{G})$  ist. Dazu

## 2.10 Lemma

$B$  Banachraum  $L(B) := \{ U : B \rightarrow B \mid U \text{ stetig, beschränkt} \}$ ,  $F$  topologischer

Raum,  $\phi(\cdot, f) : \mathbb{R}_+ \rightarrow L(B)$  von beschränkter Variation;  $(t, f) \mapsto \int_0^t \|\phi(ds, f)\|$   
stetig (punktweise),  $(t, f) \mapsto \phi(t, f)$  stetig in dem Sinne:

Zu jedem  $t$ ,  $\delta$  gibt es eine Umgebung  $U(f)$ , so daß

$\sup_{\tau \leq t+2} \|\phi(\tau, f) - \phi(\tau, f')\| \leq \delta$  für alle  $f' \in U(f)$ ; dann gibt es zu  
jedem  $f$  eine Hemigruppe  $\phi(s, t)(f)$  von Operatoren aus  $L(B)$  mit

beschränkter Variation

- i)  $\phi(s, t)(f) = I + \int_s^t \phi(s, \tau-)(f) \phi(d\tau, f)$
- ii)  $\phi(s, t)(f) = I + \sum_{n \geq 1} \int_{s \leq s_n \dots < s_1 \leq t} \phi(ds_n, f) \dots \phi(ds_1, f)$
- iii)  $(s, t, f) \mapsto \phi(s, t)(f)$  ist stetig auf  $\mathbb{R}_+^2 \times F$

Beweis:

- a) Sei  $f \in F$ . Zunächst sei  $\phi(\cdot, f)$  nur von beschränkter Variation  
vorausgesetzt, o.B. d. A. sei  $\phi(\cdot, f)$  die cadlag-Version,  $\phi(\cdot, f)$   
stetig in  $T \in \mathbb{R}_+$ . Drei Sätze aus [29], § 4:  
( $\phi(\cdot, f)$  ist von beschränkter Variation auf  $[0, T]$ , hat also die  $^*$ -Eigen-  
schaft aus Definition 2 in [29];  $X : [0, T] \rightarrow L(B)$  ist meßbar, falls  
es fast überall der Grenzwert einer Folge einfacher Funktionen ist.)

Theorem 9  $X : [0, T] \rightarrow L(B)$  integrierbar  $\Leftrightarrow$

Es gibt eine Folge  $(X_n)_n$  einfacher Funktionen mit

- i)  $X_n(s) \rightarrow X(s)$  fast überall
- ii)  $\left| \int X_n(s) 1_E(s) \phi(ds, f) - \int X(s) 1_E(s) \phi(ds, f) \right| \rightarrow 0 \forall E \in \mathcal{B}_{[0, T]}$

Theorem 10  $(X_n)_n$  eine Folge integrierbarer Funktionen mit

- i)  $X_n(s) \rightarrow X(s)$  für fast alle  $s$
- ii) zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß

$$\int 1_E(s) \|\phi(ds, f)\| < \delta \Rightarrow \left| \int 1_E(s) X_n(s) \phi(ds, f) \right| < \epsilon \forall n$$

dann ist  $X$  integrierbar und

$\int 1_E(s) X(s) \phi(ds, f) = \lim_n \int 1_E(s) X_n(s) \phi(ds, f)$  und der Grenzwert ist gleichmäßig in  $E \in \mathcal{B}_{[0, T]}$ .

(In [29], Theorem 10 ii) steht die Semi-Variation von  $\phi(\cdot, f)$  auf  $E$ , aber diese ist durch die Variation beschränkt.)

### Lemma 3

- a) Konvergiert eine Folge  $X_n$  von Funktionen im Maß  $(\phi(\cdot, f))$  gegen  $X$ , so gibt es eine Teilfolge, die fast überall gleichmäßig gegen  $X$  konvergiert.
- b) Konvergiert eine Folge  $X_n$  fast überall gegen  $X$ , so konvergiert sie fast überall gleichmäßig gegen  $X$ .

Ist  $\|X\|$  integrierbar bzgl.  $\|\phi(ds, t)\|$  (also jede beschränkte, insbesondere jede cadlag-Funktion), dann folgt aus Theorem 9

$$(3.33)' \quad \left| \int X(\tau) \phi(d\tau, f) \right| \leq \int \|X(\tau)\| \|\phi(d\tau, f)\|$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$\begin{aligned} \int_{s \leq s_n < \dots < s_1 \leq t} \dots \int \|X(s_n)\| \cdot \|\phi(ds_n, f)\| \dots \|\phi(ds_1, f)\| \leq \\ \frac{1}{n!} \left( \int_0^t \|X(\tau)\| \|\phi(d\tau, f)\| \right)^n \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (3.33)' für die iterierten Integrale

$$(3.34) \quad \left| \int_{s \leq s_n < \dots < s_1 \leq t} X(s_n) \phi(ds_n, f) \dots \phi(ds_1, f) \right| \leq \frac{1}{n!} \left( \int_0^t \|X(\tau)\| \|\phi(d\tau, f)\| \right)^n$$

Setzt man nun

$$\Sigma_n(s, t)(f, X) := I + \sum_{j=1}^n \int_{s \leq s_n < \dots < s_1 \leq t} X(s_n) \phi(ds_n, f) \dots \phi(ds_1, f),$$

so folgt aus (3.34)

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \phi(s, t)(f, X) &= \lim_n \Sigma_n(s, t)(f, X) \\ \sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \|\phi(s, t)(f, X) - \Sigma_n(s, t)(f, X)\| &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left( \int_0^T \|X(\tau)\| \|\phi(d\tau, f)\| \right)^{n+1} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \int_0^T \|X(\tau)\| \|\phi(d\tau, f)\| \right\} \end{aligned}$$

also gilt ii).

$$s_1 \leq \tau- \Leftrightarrow s_1 < \tau, \text{ also } I + \int_{s_1}^{\tau} \Sigma_n(s, \tau-)(f, X) \phi(d\tau, f) = \Sigma_{n+1}(s, t)(f, X)$$

Mit (3.35) folgt daraus

$$(3.36) \quad \begin{aligned} &\phi(s, t)(f, X) \quad \text{ist die eindeutige Lösung von} \\ &\phi(s, t)(f, X) = I + \int_s^t \phi(s, \tau)(f, X) \phi(d\tau, f) \end{aligned}$$

Da  $T$  beliebig groß ist, gelten die Aussagen auch auf  $R_+^2$

$$\phi(\cdot, f) \text{ cadlag} \Rightarrow \phi(s, s)(f, X) = I \quad \forall s$$

$$s \leq t \text{ fest, } \phi'(s, \tau)(f, X) := \begin{cases} \phi(s, \tau)(f, X) & , s \leq \tau \leq t \\ \phi(s, t)(f, X) \phi(t, \tau)(f, X) & , t \leq \tau \end{cases}$$

$$\text{Sei } s \leq r \leq t: \phi'(s, r)(f, X) = \phi(s, r)(f, X) = I + \int_s^r \phi(s, \tau)(f, X) \phi(d\tau, f) =$$

$$= I + \int_s^r \phi'(s, \tau)(f, X) \phi(d\tau, f);$$

$$t \leq r = \phi'(s, r)(f, X) = \phi(s, t)(f, X) \phi(t, r)(f, X)$$

$$= \phi(s, t)(f, X) \left( I + \int_t^r \phi(t, \tau)(f, X) \phi(d\tau, f) \right) =$$

$$= I + \int_s^t \phi(s, \tau)(f, X) \phi(d\tau, f) + \int_t^r \phi(s, t)(f, X) \phi(t, \tau)(f, X) \phi(d\tau, f)$$

$$= I + \int_s^t \phi'(s, \tau)(f, X) \phi(d\tau, f) + \int_t^r \phi'(s, \tau)(f, X) \phi(d\tau, f)$$

$$= I + \int_s^r \phi'(s, \tau)(f, X) \phi(d\tau, f)$$

Damit ist  $\phi'$  ebenfalls eine Lösung der Integralgleichung, damit gilt für

$$s \leq t \leq r: \phi(s, r)(f, X) = \phi(s, t)(f, X) \phi(t, r)(f, X), \text{ also}$$

$$(3.38) \quad \begin{aligned} &\phi(s, t)(f, X) \text{ ist eine Hemigruppe von Operatoren für} \\ &\text{jedes } X \text{ mit " } \|X\| \text{ ist } \|\phi(d\tau, f)\| \text{ integrierbar "}. \end{aligned}$$

Ist  $\|y\|$   $\|\phi(ds, f)\|$ -integrierbar, so folgt aus (3.34) und (3.35)

$$(3.38) \quad \begin{aligned} &\left\| \int_s^t y(\tau) \phi(s, d\tau)(f, X) \right\| \leq \int_s^t \|y(\tau)\| \|\phi(d\tau, f)\| \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \int_0^T \|x(\tau)\| \|\phi(d\tau, f)\| \right\} \end{aligned}$$



b) Jetzt sei vorausgesetzt, daß  $(t, f) \mapsto \phi(t, f)$  und

$$(t, f) \mapsto \int_0^t \|\phi(ds, f)\| \text{ stetig sind}$$

$X : \mathbb{R}_+ \rightarrow L(B)$ , dann ist  $V(x, T)$  die Variation von  $X$  auf  $[0, T]$ ,

$BC(\mathbb{R}_+, L(B)) =$  Raum der stetigen Funktion mit beschränkter Variation

$$\text{von } \mathbb{R}_+ \text{ in } L(B) \text{ mit } d(x, 0) := \|x\| := \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \left( \sup_{t \leq n} \|y(t)\| + V(x, n) \right) \cdot \\ \cdot \frac{1}{1 + \sup_{t \leq n} \|x(t)\| + V(x, n)}$$

Man will zeigen, daß die Abbildung  $\mathbb{R}_+^2 \times F \times BC(\mathbb{R}_+, L(B)) \rightarrow L(B)$

gegeben durch  $(s, t, f, x) \mapsto \phi(s, t)(f, x)$  stetig ist.

Aus (3.34) ergibt sich zunächst

$$\|\phi(s, t)(f, x) - I\| \leq \sup_{\tau \leq t} \|x(\tau)\| \int_s^t \|\phi(d\tau, f)\| \cdot \\ \cdot \exp \left\{ \sup_{\tau \leq t} \|x(\tau)\| \int_s^t \|\phi(d\tau, f)\| \right\}$$

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Man wählt also eine Umgebung } U(s, t, f, x), \text{ so daß} \\ \|s - s'\| \leq \delta, \|t - t'\| \leq \delta, \sup_{\tau \leq t+2\delta} \|x(\tau) - x'(\tau)\| \leq \delta, \|x - x'\| \leq \delta, \\ \left| \int_0^s \|\phi(d\tau, f)\| - \int_0^{s'} \|\phi(d\tau, f')\| \right| \leq \delta, \sup_{\tau \leq t+2\delta} \|\phi(\tau, f) - \phi(\tau, f')\| \leq \delta, \\ \left| \int_0^t \|\phi(d\tau, f)\| - \int_0^{t'} \|\phi(d\tau, f')\| \right| \leq \delta \quad \forall (s', t', f', x') \in U \end{array} \right.$$

$$\text{Sei } a := \sup_{\tau \leq t+2\delta} \|x(\tau)\|$$

$$\|\phi(s, t)(f, x) - \phi(s', t')(f', x')\| \leq \\ \leq \|\phi(s, t)(f, x) - \phi(s, t)(f', x)\| + \\ + \|\phi(s, t)(f', x) - \phi(s, t)(f', x')\| + \\ + \|\phi(s, t)(f', x') - \phi(s', t')(f', x')\|$$

i) Man schätzt  $\|\phi(s, t)(f', x') - \phi(s', t')(f', x')\|$  ab:

$$\text{o.E. } s < s' < t' < t;$$

$$\begin{aligned} & \left| \phi(s, t)(f', x') - \phi(s', t')(f', x') \right| \leq \\ & \leq \left| \phi(s, s')(f', x') - I \left| \phi(s, t')(f', x) \right| \right| + \\ & + \left| \phi(t', t)(f', x') - I \left| \phi(s, t')(f', x') \right| \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \sup_{\tau \leq t} \left\| x'(\tau) \right\| \cdot \int_s^{s'} \left| \phi(d\tau, f') \right| \cdot \exp \left\{ \sup_{\tau \leq t+2\delta} \left\| x'(\tau) \right\| \int_s^{s'} \left| \phi(d\tau, f') \right| \right\} \cdot \\ & \cdot (M + \exp \{ 2 \sup_{\tau \leq t} \left\| x'(\tau) \right\| \int_0^t \left| \phi(d\tau, f') \right| \}) + \\ & + \sup_{\tau \leq t} \left\| x'(\tau) \right\| \int_{t'}^t \left| \phi(d\tau, f') \right| \cdot \exp \left\{ \sup_{\tau \leq t} \left\| x'(\tau) \right\| \int_{t'}^t \left| \phi(d\tau, f') \right| \right\} \cdot \\ & \cdot (M + \exp \{ 2 \sup_{\tau \leq t} \left\| x'(\tau) \right\| \int_0^t \left| \phi(d\tau, f') \right| \}) \leq \\ & \leq (\delta+a) \left( \delta + \int_s^{s'} \left| \phi(d\tau, f) \right| \right) \exp \left\{ (\delta+a) \left( \delta + \int_s^{s'} \left| \phi(d\tau, f) \right| \right) \right\} \cdot \\ & \cdot (M + \exp \{ 2 (\delta+a) \left( \delta + \int_0^t \left| \phi(d\tau, f) \right| \right) \}) + \\ & + (\delta+a) \left( \delta + \int_{t'}^t \left| \phi(d\tau, f) \right| \right) \exp \left\{ (\delta+a) \left( \delta + \int_{t'}^t \left| \phi(d\tau, f) \right| \right) \right\} \cdot \\ & \cdot (M + \exp \{ 2 (\delta+a) \left( \delta + \int_0^t \left| \phi(d\tau, f) \right| \right) \}) \leq C \cdot \delta \end{aligned}$$

ii) Man schätzt  $\left| \phi(s, t)(f', x') - \phi(s, t)(f', x) \right|$  ab:

$$\begin{aligned} & \left| \phi(s, t)(f', x') - \Sigma_n(s, t)(f', x') \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{(n+1)!} \left( \int_0^t \left\| x'(\tau) \right\| \left| \phi(d\tau, f') \right| \right)^{n+1} \exp \left\{ \int_0^t \left\| x'(\tau) \right\| \left| \phi(d\tau, f') \right| \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{(n+1)!} \left( \sup_{\tau \leq t} \left\| x'(\tau) \right\| \int_0^t \left| \phi(d\tau, f) \right| \right) \exp \left\{ \sup_{\tau \leq t} \left\| x'(\tau) \right\| \int_0^t \left| \phi(d\tau, f') \right| \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{(n+1)!} \left( (\delta+a) \left( \delta + \int_0^t \left| \phi(d\tau, f) \right| \right) \right)^{n+1} \exp \left\{ (\delta+a) \left( \delta + \int_0^t \left| \phi(d\tau, f) \right| \right) \right\} \\ & \leq C \cdot \delta \text{ für } n \geq n_0(s); \text{ ebenso} \\ & \left| \phi(s, t)(f', x) - \Sigma_n(s, t)(f', x) \right| \leq C \cdot \delta \text{ für } n \geq n_0 \\ & \left| \Sigma_n(s, t)(f', x') - \Sigma_n(s, t)(f', x) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{j=1}^n \left\| \int_{s_n < \dots < s_1 \leq t} (x'(s_n) - x(s_n)) \phi(ds_n, f') \dots \phi(ds_1, f') \right\| \leq \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \left( \int_s^t \|x'(\tau) - x(\tau)\| \|\phi(d\tau, f')\| \right)^j \leq \\
 &\leq \delta \int_s^t \|\phi(d\tau, f')\| \exp \left\{ \delta \cdot \int_s^t \|\phi(d\tau, f')\| \right\} \leq \\
 &\leq \delta \cdot \left( 2\delta + \int_0^s \|\phi(d\tau, f)\| + \int_0^t \|\phi(d\tau, f)\| \right) \\
 &\exp \left\{ \delta \left( 2\delta + \int_0^s \|\phi(d\tau, f)\| + \int_0^t \|\phi(d\tau, f)\| \right) \right\} \leq C \cdot \delta,
 \end{aligned}$$

$$\text{also } \|\phi(s, t)(f', x') - \phi(s, t)(f', x)\| \leq C \cdot s$$

iii) Man schätzt  $\|\phi(s, t)(f, x) - \phi(s, t)(f', x)\|$  ab:

$$\Delta_n := \frac{1}{n} (t-s), \quad y \in B C (R_+, L(B))$$

$$\begin{aligned}
 &y(t) (\phi(t, f) - \phi(t, f')) - y(s) (\phi(s, f) - \phi(s, f')) = \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} (y(s + (j+1)\Delta_n) (\phi(s + (j+1)\Delta_n, f) - \phi(s + (j+1)\Delta_n, f')) - \\
 &\quad - y(s + j\Delta_n) (\phi(s + j\Delta_n, f) - \phi(s + j\Delta_n, f'))) = \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} y(s + (j+1)\Delta_n) (\phi(s + (j+1)\Delta_n, f) - \phi(s + j\Delta_n, f)) + \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} (y(s + (j+1)\Delta_n) - y(s + j\Delta_n)) \phi(s + j\Delta_n, f) - \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} y(s + (j+1)\Delta_n) (\phi(s + (j+1)\Delta_n, f') - \phi(s + j\Delta_n, f')) + \\
 &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} (y(s + (j+1)\Delta_n) - y(s + j\Delta_n)) \phi(s + j\Delta_n, f') \\
 &\rightarrow \int_s^t y(\tau) \phi(d\tau, f) + \int_s^t y(\tau) \phi(\tau, f) - \\
 &\quad - \int_s^t y(\tau) \phi(d\tau, f') - \int_s^t y(\tau) \phi(\tau, f') -
 \end{aligned}$$

nach [29], Theorem 9.

Sind also  $y, y' \in B C (R_+, L(B))$ , dann ist

$$\int_s^t y(\tau) \phi(d\tau, f) - \int_s^t y'(\tau) \phi(d\tau, f') =$$

$$= \int_s^t y(\tau) \phi(d\tau, f) - \int_s^t y'(\tau) \phi(d\tau, f') + \int_s^t (y(\tau) - y'(\tau)) \phi(d\tau; f')$$

$$= y(t) (\phi(t, f)) - \phi(t, f') - y(s) (\phi(s, f) - \phi(s, f'))$$

$$- \int_s^t y(d\tau) (\phi(\tau, f) - \phi(\tau, f')) + \int_s^t (y(\tau) - y'(\tau)) \phi(d\tau, f')$$

Also:  $\sup_{\tau \leq t} \| y(\tau) - y'(\tau) \| \leq \eta$ ,  $\int_0^t \| y(d\tau) \| \leq C_1$ , dann ist

$$\left\| \int_s^t y(\tau) \phi(d\tau, f) - \int_s^t y'(\tau) \phi(d\tau, f') \right\| \leq 3 C_1 \delta + \eta \int_0^t \left\| \phi(d\tau, f') \right\| \leq$$

$$(***) \leq (3 C_1 + \eta) \delta + \eta \int_0^t \left\| \phi(d\tau, f) \right\|$$

$$\tilde{\phi}(s, t)(f, x) := \begin{cases} I, & t \leq s \\ I + \phi(s, \tau^-)(f, x) \phi(d\tau, f), & t \geq s \end{cases}$$

da  $(t, f) \rightarrow \int_0^t \left\| \phi(ds, f) \right\|$  stetig ist,

ist  $\tilde{\phi}(s, \cdot)(f, x) \in BC(\mathbb{R}_+, L(B))$  und auch alle

$$\tilde{I}_n(s, t)(f, x) := \begin{cases} 0, & t \leq s \\ \int_{s \leq s_1 < \dots < s_1 \leq t} x(s_n) \phi(ds_n, f) \dots \phi(ds_1, f), & t \geq s \end{cases}$$

Wie in ii) gezeigt, ist

$$\left\| \phi(s, t)(f', x) - \Sigma_n(s, t)(f', x) \right\| \leq C \cdot \delta \quad \forall n \geq n_0$$

$$\left\| \phi(s, t)(f, x) - \Sigma_n(s, t)(f, x) \right\| \leq C \cdot \delta \quad \forall n \geq n_0$$

$$(***) \Rightarrow \left\| \tilde{I}_n(s, t)(f, x) - \tilde{I}_n(s, t)(f', x) \right\| \leq C_2 \cdot \delta \quad n = 1, \dots, n_0$$

$$\text{und damit } \left\| \phi(s, t)(f, x) - \phi(s, t)(f', x) \right\| \leq C_3 \cdot \delta$$

i) - iii) folgt nun das Lemma.

## 2.11 Satz

a) Ist  $G$  eine Moore-Gruppe,  $(\mu_n(\cdot, \cdot))_{n \geq 1} \leq M^1(G)$  eine Folge von Hemi-Gruppen,  $\hat{\mu}_n(\cdot, \cdot)(U)$  von beschränkter Variation und assoziierten

$\phi_n(\cdot)(U)$ , es gibt ein  $\phi_0: \mathbb{R}_+ \times \text{Rep}_0(G) \rightarrow \bigcup_{M \geq 1} M(M, G)$  mit

i)  $(t, U) \mapsto \int_0^t \left\| \phi_0(d\tau)(U) \right\|$  stetig

$$\text{ii)} \quad \bigwedge_{t, \delta, U} \bigvee_{K, \varepsilon} \bigwedge_{\substack{U' \in W(U, K, \varepsilon) \\ \tau \leq t+2}} \|\phi_0(\tau)(U) - \phi_0(\tau)(U')\| \leq \delta$$

$$\text{iii)} \quad \phi_n(0)(U) = 0, \quad \phi_0(t)(U) = \lim_n \phi_n(t)(U) \quad \forall t \in D_1, U \in \text{Rep}_0(G)$$

$$\text{iv)} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t \\ |t-s| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \int_s^t \|\phi_n(d\tau)(U)\| = 0 \quad \forall U \in \text{Rep}_0(G)$$

Dann folgt: Es gibt eine stetige Hemi-Gruppe  $\mu_0(\cdot, \cdot)$ , so daß  $\phi_0$  der zu  $\mu_0$  assoziierte Prozeß ist und  $\mu_n \not\rightarrow \mu_0$ .

b) Ist  $(G, d)$  eine vollständige, separable, metrische Moore-Gruppe,  $(X_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von  $G$ -wertigen cadlag-Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen,  $\mu_n(s, t) := P(X_n^{-1}(s) X_n(t))^{-1}$ , gibt es ein

$$\phi_0 : \mathbb{R}_+ \times \text{Rep}_0(G) \rightarrow \bigcup_{M \geq 1} M(M, \mathbb{C}), \text{ so daß die } \mu_n \text{ und } \phi_0$$

die Bedingungen in a) erfüllen, dann gibt es einen stochastisch stetigen Prozeß  $X_0$  mit unabhängigen Zuwächsen und  $X_n \xrightarrow{d} X_0$ .

#### Beweis:

a) Folgt sofort aus Folgerung 1.7, Lemma 2.10, (3,33) und Satz 2.5.

b) Wie a) mit Satz 2.8 statt Satz 2.5.

Aus Satz 2.11 läßt sich ein Grenzverteilungssatz für "Martingal Differenzen" auf  $G$  herleiten. Sei  $(G, d)$  ein vollständiger, separabler, metrischer Raum,  $G$  eine Moore-Gruppe, dann ist nach [10] 1.3.1.3  $\text{Rep}_0(G)$  ein polnischer Raum.

Sei  $\phi_0$  eine Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+ \times \text{Rep}_0(G), \bigcup_{M \geq 1} M(M, \mathbb{C}))$  und es gilt f.s. :

$$\text{i)}' \quad (t, U) \mapsto \int_0^t \|\phi_0(d\tau)(U)\| \text{ ist stetig}$$

$$\text{ii)}' \quad \bigwedge_{t, \delta, U} \bigvee_{K, \varepsilon} \bigwedge_{\substack{U' \in W(U, K, \varepsilon) \\ \tau \leq t+1}} \|\phi_0(\tau)(U) - \phi_0(\tau)(U')\| \leq \delta$$

Sei  $(G_{n,j}, f_{n,j})_{n,j}$  ein Dreiecksschema,  $f_0 := \bigcap_{n \geq 1} f_{n,0}$ ,

$f_{n,0} \overset{C}{=} f_{n,1} \overset{C}{=} \dots \varphi_n$ ;  $G_n$  ist  $G$ -wertig und  $f_{n,j}$ -meßbar  $\varphi_n, j$ ;  $k_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{N}_0$  ist cadlag, wachsend mit  $k_n(0) = 0$ ,  $k_n(t)$  ( $f_{n,j}$ )-Stoppzeit.

## 2.12 Folgerung

$\phi_0, (G_{n,j})_{n,j}, k_n$  erfüllen die soeben gemachten Voraussetzungen und außerdem sei  $\phi_0 f_0$ -meßbar.

Sei  $\Psi_n(t)(U) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} (E(U(G_{n,j}) | f_{n,j-1}) - I)$ ,

$$\mu_n(s, t) := P \left( \prod_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} G_{n,j} \right)^{-1}, \text{ es gelte}$$

iii)'  $\Psi_n(t)(U) \rightarrow \phi_0(t)(U)$  n.W.  $\forall t \in D_1, U \in \text{Rep}_0(G)$

iv)' für jedes  $U \in \text{Rep}_0(G)$ ,  $T > 0$  gilt f.s.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s, t \leq T, |t-s| \leq \delta} \left\{ \int_s^t \Psi_n(d\tau)(U) \right\} = 0$$

dann folgt: Es gibt eine Familie  $\{\mu_0(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\} \subseteq \mathbb{M}^1(G)$

mit  $(s, t) \mapsto \mu_0(s, t)$  ist stetig auf  $\mathbb{R}_+^2$  und

$$\mu_n(s, t) \xrightarrow{w} \mu_0(s, t) \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Für die Fourier-Transformierten gilt: Zu jedem  $U \in \text{Rep}_0(G)$  gibt es eine eindeutige, starke Lösung  $\psi'_0$  von

$$\psi'_0(s, t)(U) = I + \int_{[s,t]} \psi'_0(s, t) \phi_0(d\tau)(U)$$

mit  $\hat{\mu}_0(s, t)(U) = E \psi'_0(s, t)(U)$  auf  $\mathbb{R}_+^2$ .

### Beweis:

Angenommen, man hat gezeigt, es gilt

(\*) zu  $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $U \in \text{Rep}_0(G)$  gibt es ein  $\hat{\phi}_0(s, t)(U)$

mit  $\hat{\mu}_n(s, t)(U) \rightarrow \hat{\phi}_0(s, t)(U)$  und  $\hat{\phi}_0$  ist stetig auf  $\mathbb{R}_+^2 \times \text{Rep}_0(G)$

dann gilt nach (3.33): Es gibt eine Familie

$$\{\mu_0(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\} \subseteq \mathbb{M}^1(G), \mu_0 \text{ stetig auf } \mathbb{R}_+^2 \text{ und}$$

$$\mu_n(s, t) \xrightarrow{w} \mu_0(s, t) \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2, \hat{\phi}_0(s, t) = \hat{\mu}_0(s, t).$$

Es bleibt also (\*) nachzuweisen.

$$\text{Sei } \psi'_n(s, t)(U) := \prod_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} E(U(g_{n,j}) \mid f_{n,j-1})$$

Nach Satz III. 1.2 gibt es eine Lösung  $\psi'_0$  von

$$(**) \quad \psi'_0(s, t)(U) = I + \int_{[s,t]} \psi'_0(s, \tau)(U) \phi_0(d\tau)(U),$$

da wegen i)'  $\phi_0(t)(U)$  ein cadlag-Prozeß von beschränkter Variation ist, außerdem ist  $\psi_0(\cdot, \cdot)(U)$  f.s. stetig, da  $\phi_0(\cdot)(U)$  es ist.

Ersetzt man  $\phi_0$  durch  $\psi_n$  und  $\psi'_0$  durch  $\psi'_n$ , so gilt auch

$$\psi'_n(s, t)(U) = I + \int_{[s,t]} \psi'_n(s, \tau)(U) \psi_n(d\tau)(U)$$

Man zeigt nun:  $\psi'_n(s, t)(U) \rightarrow \psi'_0(s, t)(U)$  n.W.

Sei  $(n') \subseteq (n)$ ; es gibt wegen iii)' eine Teilfolge  $(n'') \subseteq (n')$  mit

$\psi_{n''}(t)(U) \rightarrow \phi_0(t)(U) \quad \forall t \in D_1$  f.s. (Diagonalfolgenkonstruktion)

Sei nun  $\omega$  aus der Menge mit dem Maß 1, für die i)', ii)',

$$\psi_{n''}(t, \omega)(U) \rightarrow \phi_0(t, \omega)(U) \quad \forall t \in D_1 \quad \text{und}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n''} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ t, s \in T}} \int_{[s,t]} |\psi_{n''}(d\tau, \omega)(U)| = 0 \quad \forall T > 0 \text{ gilt.}$$

Mit  $B_{n''}(t) := \psi_{n''}(t, \omega)(U)$  ist

$$\int_{[s,t]} |dB_{n''}(\tau)| \leq \prod_{j=k_{n''}(s)+1}^{k_{n''}(t)} |E(U(G_{n'',j}) \mid f_{n'',j-1}) - I|,$$

Nach Bemerkung III. 1.9 ist dann Voraussetzung III. 3. erfüllt, es gilt also Folgerung 1.8, d.h.

$$\sup_{s \leq t} |\psi_{n''}(s, \omega)(U) - \phi_0(s, \omega)(U)| \rightarrow 0 \quad \forall t \text{ und}$$

$$\sup_{s \leq t \leq T} |\psi'_{n''}(s, t; \omega)(U) - \psi'_0(s, t; \omega)(U)| \rightarrow 0 \quad \forall s, T$$

also insbesondere:  $\psi'_{n''}(s, t)(U) \rightarrow \psi'_0(s, t)(U)$  n.W.

$$\text{d.h.} \quad \prod_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} E_{n,j-1}(U(G_{n,j})) \rightarrow \psi'_0(s, t)(U) \text{ n.W.}$$

$$\text{Da } \max_{j=1}^{k_n(T)} \| E_{n,j-1} \cup (G_{n,j}) - I \| \leq \sup_{|s-t| \leq \delta} \max_{\substack{j=k_n(s)+1 \\ s, t \leq T}}^{k_n(t)} \| E_{n,j-1} \cup (G_{n,j}) - I \|,$$

$$\text{folgt aus iv)'} : \max_{j=1}^{k_n(T)} \| E_{n,j-1} \cup (G_{n,j}) - I \| \rightarrow 0 \text{ n.W. } \forall T$$

Aus Lemma A.7 folgt damit, und da wegen der  $f_0$ -Meßbarkeit von  $\phi_0$  natürlich auch  $\psi'_0 f_0$ -meßbar ist:

$$E \left( \max_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} U(G_{n,j}) \mid f_0 \right) \rightarrow \psi'_0(s, t)(U) \text{ n.W. } \forall s, t.$$

$$\text{Wegen } \max_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} U(G_{n,j}) = \max_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} U(G_{n,j}) \leq M \text{ folgt:}$$

$$\hat{\mu}_n(s, t)(U) = E \max_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} U(G_{n,j}) \rightarrow E \psi'_0(s, t)(U) \quad \forall s, t$$

$$\text{Sei also } \phi_0(s, t)(U) := E \psi'_0(s, t)(U)$$

Für (\*) muß noch die Stetigkeit von  $\phi_0$  gezeigt werden.

Sei  $\omega$  nicht in den Ausnahmемengen von i)', ii)' und (\*\*).

$\phi_0(t, \omega)(U)$  erfüllt dann die Voraussetzungen von Lemma III. 2.10, also

ist dann  $\psi'_0(\cdot, \cdot; \omega)(\cdot)$  stetig auf  $\mathbb{R}_+^2 \times \text{Rep}_0(G)$ , da

$$\| \psi'_0(s, t)(U) \| \leq M \text{ ist, setzt sich dies fort auf } E \psi'_0 = \phi_0.$$

### 2.13 Bemerkung

Nach [10], Theorem O auf Seite 15 ist jede kompakte Gruppe eine Moore-Gruppe, also gelten die bisherigen Aussagen insbesondere für kompakte Gruppen. Am Ende von Kapitel 4 wird noch ein anderer Weg aufgezeigt, um Verteilungskonvergenz auf kompakten Gruppen nachzuweisen.

### § 3 Ein Problem aus der Kontrolltheorie

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, (f_t)_{0 \leq t \leq 1} \mid P)$  eine vollständige, rechtsstetige, stochastische Basis, auf der die im folgenden auftretenden Prozesse definiert sind;  $B$  eine Standard Brown'sche Bewegung auf  $[0, 1]$  mit Werten in  $\mathbb{M}^M$ , adaptiert an  $(f_t)_t$ ;



$\mathbb{U}$  die Klasse der meßbaren Funktionen  $u : [0,1] \times D([0,1], \mathbb{M}^M) \rightarrow \mathbb{M}^M \subseteq \mathbb{M}^M$ , mit  $u$  adaptiert an die kanonische Filtrierung,  $\mathbb{U}$  die Menge der  $u \in \mathbb{U}$  von der Form  $u(t,x) = u(t, x(t))$ ;

### 3.1 Bemerkung

Für  $\Omega = D([0,1], \mathbb{M}^M)$  ist  $u(t,x)$  gleich einem Prozeß  $U(t,\omega)$ , der an  $(\mathcal{F}_t)_t$  adaptiert ist.

### Allgemeine Voraussetzungen und Problemstellung:

Es sind  $y \in \mathbb{M}^M$ ;  $g : \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt;

$h_1 : [0,1] \times \mathbb{M}^M \times \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  und  $h_2 : [0,1] \times \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  Lipschitz-stetig mit der Konstanten  $L_1$  gegeben.

Gesucht wird dasjenige  $u \in \mathbb{U}$ , für das die zugehörige Lösung  $Y$  von

$$(3.40) \quad Y(t) = y + \int_{[0,t]} h_1(s, Y(s), u(s,Y)) ds + \int_{[0,t]} h_2(s,Y) dB(s)$$

das Funktional  $J(u) := E g(Y(1))$  auf  $\mathbb{U}$  minimiert.

Da das Problem in dieser Form oft nicht zu lösen ist, versucht man die Lösung approximativ zu finden. Seien also  $\xi_1, \xi_2, \dots$   $\mathbb{M}^M$ -wertige, iid Zufallsvariablen mit  $E \xi_1 = 0$ ,  $E \xi_1 \otimes \xi_1 = I \otimes I$ ,  $\xi_{n,j} := \frac{1}{n} \xi_j$

Man setzt  $A_n(t) := \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} 1_{[\frac{j}{n}, \infty[)}(t)$ ,  $B_n(t) := \sum_{j=1}^n \xi_{n,j} 1_{[\frac{j}{n}, \infty[)}(t)$

$$(3.41) \quad Y_n(t) = y + \int_{[0,t]} h_1(s-, Y_n(s-), u(s-, Y_n)) dA_n(s) + \\ + \int_{[0,t]} h_2(s-, Y_n(s-)) dB_n(s)$$

Die Lösung von (3.41) ergibt sich aus der Rekursion

$$(3.42) \quad \begin{aligned} Y_n(0) &= y \\ Y_n\left(\frac{j+1}{n}\right) &= Y_n\left(\frac{j}{n}\right) + h_1\left(\frac{j+1}{n}, Y_n\left(\frac{j}{n}\right), u\left(\frac{j+1}{n}, Y_n\right)\right) \frac{1}{n} + \\ &\quad + h_2\left(\frac{j+1}{n}, Y_n\left(\frac{j}{n}\right)\right) \xi_{n,j+1} \\ Y_n(t) &= Y_n\left(\frac{j}{n}\right), \quad \frac{j}{n} < t < \frac{j+1}{n} \end{aligned}$$

Über die Rekursion versucht man nun ein  $u_n \in \mathbb{U}$  zu finden, daß  $J_n(u) = E g(Y_n(1))$  minimiert. Falls solche  $u_n$  existieren und gegen ein  $u_0$  konvergieren, so ist dieses  $u_0$  die Lösung des ursprünglichen Problems. Zu beachten ist, daß die  $u_n$  keine gemeinsame Lipschitz-Konstante haben müssen, sich die Ergebnisse aus Kapitel I nicht einfach übertragen lassen. Jeoch läßt sich die Beweismethode aus Lemma I. 4 anwenden.

### 3.2 Lemma

Ist  $h_1$  beschränkt oder sind die  $u_n$  gleichmäßig beschränkt,  $Y_n$  die zu  $u_n$  gehörende Lösung von (3.41), so ist  $(P Y_n^{-1})_n$  relativ kompakt.

#### Beweis

Man überträgt den Beweis von Lemma I. 4 auf die Rekursion (3.42).

Bewiesen wird die Aussage nur für den im Folgenden auftretenden Fall, daß die  $u_n$  gleichmäßig beschränkt sind. Der andere Fall verläuft analog.

Für  $F_{n,j} \in \sigma(\xi_1, \dots, \xi_{j-1})$  setzt man

$$\bar{Y}_n(t) = y \cdot 1_{F_{n,0}} + \sum_{j=1}^n 1_{F_{n,j}} \left( h_1 \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \left( \frac{j}{n} \right), u_n \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \right) \right) \cdot \frac{1}{n} + h_2 \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \left( \frac{j}{n} \right) \right) \xi_{n,j} \right)$$

( wo  $F_{n,1}, F_{n,0} \in \{ \emptyset, \Omega \}$  )

Nach den Voraussetzungen an  $u_n$ ,  $h_1$  und  $h_2$  gibt es ein  $C_1$  mit

$$\left| h_1 \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \left( \frac{j}{n} \right), u_n \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \right) \right) \right| \leq C_1 + L_1 \left| Y_n \left( \frac{j}{n} \right) \right| \text{ und}$$

$$\left| h_2 \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \left( \frac{j}{n} \right) \right) \right| \leq C_1 + L_1 \left| Y_n \left( \frac{j}{n} \right) \right|$$

$$\begin{aligned} E \left( \bar{Y}_n^2(i,1) \left( \frac{j+1}{n} \right) \mid \xi_1, \dots, \xi_j \right) &= \bar{Y}_n^2(i,1) \left( \frac{j}{n} \right) + \\ &+ 2 \cdot \frac{1}{n} 1_{F_{n,j}} \cdot \bar{Y}_n(i,1) \left( \frac{j}{n} \right) \cdot h_1 \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \left( \frac{j}{n} \right), u_n \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \right) (i,1) \right. \\ &+ \frac{1}{n^2} 1_{F_{n,j}} h_1^2 \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \left( \frac{j}{n} \right), u_n \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \right) (i,1) \right. \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{q=1}^M h_2^2 \left( \frac{j+1}{n}, Y_n \left( \frac{j}{n} \right) \right) (i,q) 1_{F_{n,j}} \end{aligned}$$

$$\leq \bar{Y}_n^2(i,1) \left( \frac{j}{n} \right) + \frac{4}{n} \frac{1}{F_{n,j}} \bar{Y}_n^2(i,1) \left( \frac{j}{n} \right) + \frac{4}{n} \frac{1}{F_{n,j}} \left( C_1 + L_1 \left\| Y_n \left( \frac{j}{n} \right) \right\| \right)^2 + \\ + \frac{1}{n^2} \frac{1}{F_{n,j}} \left( C_1 + L_1 \left\| Y_n \left( \frac{j}{n} \right) \right\| \right)^2 + \frac{M}{n} \frac{1}{F_{n,j}} \left( C_1 + L_1 \left\| Y_n \left( \frac{j}{n} \right) \right\| \right)^2$$

Damit gilt für ein  $C_2$ , da  $\frac{1}{F_{n,j}} Y_n \left( \frac{j}{n} \right) = \frac{1}{F_{n,j}} \bar{Y}_n \left( \frac{j}{n} \right)$  ist,

$$E \left( \left\| \bar{Y}_n \left( \frac{j+1}{n} \right) \right\|^2 \mid \xi_1, \dots, \xi_j \right) \leq \left\| \bar{Y}_n \left( \frac{j}{n} \right) \right\|^2 \left( 1 + \frac{C_2}{n} \frac{1}{F_{n,j}} \right) + \frac{C_2}{n} \cdot \frac{1}{F_{n,j}}$$

$$\text{Also } E \left\| \bar{Y}_n \left( \frac{j}{n} \right) \right\|^2 \leq C_3 \quad \forall n, j = 0, \dots, n$$

Setzt man  $F_{n,j} = \{ [n t] \geq j \}$ , so ist  $\bar{Y}_n^{-1}(1) = Y_n(t)$ , also

$$P \left( \left\| Y_n(t) \right\| > A \right) \leq \frac{1}{A^2} C_3 \text{ und damit ist } \left( P Y_n^{-1}(t) \right)_n \text{ straff.}$$

Ist  $(\tau_n, \delta_n)$  wie in [40], Theorem 1 gefordert, dann setzt man

$$F_{n,j} := \{ [n \tau_n] < j \leq (n (\tau_n + \delta_n)) \} \in \sigma(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}), \text{ dann ist}$$

$$\bar{Y}_n(1) = Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n),$$

$$\text{also wird } E \left\| \bar{Y}_n(1) \right\|^2 \leq G_3 E \sum_{j=0}^n \frac{1}{n} \frac{1}{F_{n,j}};$$

$F_{n,j} \stackrel{C}{=} \{ n \tau_n - 1 < j \leq n (\tau_n + \delta_n) + 1 \}$ , also ist die Zahl derjenigen

$j \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{F_{n,j}} = 1$  beschränkt durch  $n (\tau_n + \delta_n) + 1 - (n \tau_n - 1) = n \delta_n + 2$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{F_{n,j}} \leq \delta_n + \frac{2}{n} \Rightarrow E \left\| \bar{Y}_n(1) \right\|^2 \leq C_3 \left( \delta_n + \frac{2}{n} \right) \rightarrow 0$$

$$\text{also: } P \left( \left\| Y_n(\tau_n + \delta_n) - Y_n(\tau_n) \right\| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E \left\| \bar{Y}_n(1) \right\|^2 \rightarrow 0$$

Mit Satz [40], Theorem 1 folgt die Behauptung.

### 3.3 Bemerkung

Es gilt  $B_n \xrightarrow{D} B_0$ ; außerdem konvergiert  $\sup_{t \leq 1} |A_n(t) - t| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ;

$L$  sei das Lebeque-Maß auf  $[0,1]$ , geschrieben  $L(dt)$  oder nur  $dt$ ;  $L_M$  sei das Lebeque-Maß auf  $\mathbb{M}^M$ .

#### Voraussetzung 4

- i) Für die Kontrolle  $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{U}$  gilt:  $u_n + u_0$  nach  $L \times L_m$  - Maß.  
 ii)  $h_1 : [0,1] \times \mathbb{M}^M \times \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  ist beschränkt,  
 $h_2 : [0,1] \times \mathbb{M}^M \rightarrow \mathbb{M}^M$  ist beschränkt,  
 $h_2(t,x)$  ist invertierbar  $\forall (t,x)$  und  $\{h_2^{-1}(t,x)\}$  ist beschränkt.

#### 3.4 Satz

Ist Voraussetzung 4 erfüllt, so konvergiert die zu  $u_n$  gehörende Lösung  $Y_n$  von (3.41) nach Verteilung gegen die zu  $u_0$  gehörende Lösung  $Y_0$  von (3.40).

#### Beweis:

Man zeigt zuerst, daß es eine stochastische Basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, Q)$  mit einer Standard Brown'schen Bewegung  $B_0$  und einer zu  $u_0$  gehörenden Lösung  $Y_0$  von (3.40) gibt. Dazu betrachte

$$(3.43) \quad Y(t) = y + \int_{0,t} h_2(s, Y(s)) dB(s), \text{ dann hat (3.43) eine}$$

eindeutige, starke Lösung  $Y$  auf  $(0,1)$  (siehe (26) Theorem 7.2) und  $Y$  ist f.s. stetig. Sei  $\Phi(s) := (h_2(s, Y(s))^{-1} h_1(s, Y(s), u_0(s, Y(s))))$ , dann ist  $\Phi(s-)$  vorhersagbar, beschränkt mit

$$\int_{0,t} \Phi(s-) ds = \int_{0,t} \Phi(s) ds \text{ und } \int_{0,t} \Phi(s-) dB(s) = \int_{0,t} \Phi(s) dB(s)$$

Man setzt nun  $B_0(t) := B(t) - \int_{0,t} \Phi(s) ds$ ,

$w(t) := \sum_{p,q=1}^M \int_{0,t} \Phi(p,q)(s) dB(p,q)(s)$ . Betrachtet man die Lösung

$\xi$  von  $\xi(t) = 1 - \int_{0,t} \xi(s) dw(s)$ , so ist  $\xi$  das sogenannte Exponential  $\in$

von  $-w$  und läßt sich nach [21], Definition 29.3 darstellen als

$$\xi(t) = \exp \left\{ -w(t) - \frac{1}{2} \langle w, w \rangle(t) \right\} =$$

$$= \exp \left\{ - \sum_{p,q=1}^M \int_{0,t} \Phi(p,q)(s) dB(q,p)(s) - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^M \int_{0,t} \Phi^2(p,q)(s) ds \right\}$$

da  $h_2^{-1}$  und  $h_1$  beschränkt sind, ist  $w$  quadratintegrierbar und

$$\langle w, w \rangle (\cdot) = \sum_{p,q=1}^M \int_{]0,t]} \phi^2(p,q)(s) ds$$

beschränkt, nach [30], Théorème II. 2 a) ist dann  $\xi(t) = \epsilon(w)(t)$

quadratintegrierbar. Mit dem Theorem von Girsanov ([21], Theorem 30.4, Remark 30.6) folgt, daß für die Wahrscheinlichkeit  $Q$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, (f_t)_t)$ , definiert durch  $\frac{dQ}{dP} = \xi(1)$ , der Prozeß  $B_0$  eine Standard Brown'sche Bewegung ist. Außerdem ist

$$\begin{aligned} y + \int_{]0,t]} h_1(s, Y(s), u_0(s, Y(s))) ds + \int_{]0,t]} h_2(s, Y(s)) dB_0(s) &= \\ = y + \int_{]0,t]} h_2(s, Y(s)) dB(s) &= Y(t), \text{ d.h. } Y \text{ ist die eindeutige,} \end{aligned}$$

starke Lösung von (3.40) auf  $(\Omega, \mathcal{F}, (f_t)_t, Q)$  mit Brown'scher Bewegung  $B_0$  und die Verteilung  $Q(Y(t))^{-1}$  hat eine Dichte, ebenso  $P(Y(t))^{-1}$ .

Sei also  $Y$  Lösung von

$$Y(t) = y + \int_{]0,t]} h_1(s, Y(s), u_0(s, Y(s))) ds + \int_{]0,t]} h_2(s, Y(s)) dB(s)$$

Man identifiziert nun  $\mathbb{R}^M$  und  $\mathbb{R}^{M^2}$  durch

$\mathbb{R}^M \ni x(i, j) \leftrightarrow x'(M(j-1) + i) \in \mathbb{R}^{M^2}$ , es ergibt sich auf  $\mathbb{R}^{M^2}$  die Gleichung

$$Y'(t) = y' + \int_{]0,t]} h'_1(s, Y'(s), u_0(s, Y'(s))) ds + \int_{]0,t]} h'_2(s, Y'(s)) dB'(s)$$

wobei  $h'_2(s, x') : \mathbb{R}^{M^2} \rightarrow \mathbb{R}^{M^2}$  durch die Matrix

$$h'_2(s, x') = \begin{pmatrix} h_2(s, x) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & h_2(s, x) \end{pmatrix} \text{ und } x \leftrightarrow x'$$

definiert ist. Da  $u_0 \in \mathcal{U}$  ist, ist  $u_0(s, f) = u_0(s, f(s))$ , durch

$b(s, x') := h'_1(s, x', u_0(s, x'))$  und  $\sigma(s, x') := h'_2(s, x')$  erhält man die Ito-Skorohod Gleichung

$$Y'(t) = y' + \int_{]0,t]} b(s, Y'(s)) ds + \int_{]0,t]} \sigma(s, Y'(s)) dB'(s)$$

und muß also zeigen, daß die Lösung  $Y'(s)$ , d.h. ihre Verteilung, eine Dichte besitzt. Dazu definiert man  $(a(s, x') := \sigma(s, x') \sigma^T(s, x')$  ( $\sigma^T$  ist die Transponierte von  $\sigma$ ) und den Operator  $L_c$  auf den  $C^2$ -Funktionen

$$L_c \phi(x') := \sum_{i=1}^{M^2} b(t, x') \frac{\partial}{\partial x'_i} \phi(x') + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{M^2} a(t, x') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \phi(x')$$

Man weist folgendes nach:

Es gibt zu  $T > 0$ ,  $R > 0$  Zahlen  $0 < \lambda_{T,R} \leq \Lambda_{T,R} < \infty$ ,  $B_{T,R} < \infty$  und eine nichtfallende Funktion  $\delta_{T,R} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit

$$i) \quad \lambda_{T,R} \|y'\|^2 \leq \langle y', a(s, x') y' \rangle \leq \Lambda_{T,R} \|y'\|^2 \text{ für alle}$$

$$y' \in \mathbb{R}^{M^2}, s \leq 1, \|x'\| \leq R$$

$$ii) \quad \sup \left\{ \|a(s, x'_1) - a(s, x'_2)\| : 0 \leq s \leq 1; \|x'_1\|, \|x'_2\| \leq R; \right. \\ \left. \|x'_1 - x'_2\| \leq \delta_{T,R}(\epsilon) \right\} < \epsilon, \epsilon > 0$$

da außerdem  $a$  und  $b$  beschränkte, meßbare Funktionen sind und  $a$  wegen i) positiv definit ist, folgt mit [34], Korollar 9.1.10 die Existenz einer Dichte für die Verteilung von  $Y'(t)$ .

$$\text{zu ii):} \quad a(s, x') = \sigma(s, x') \sigma^T(s, x') \Rightarrow \|a(s, x'_1) - a(s, x'_2)\| \leq 2 \|\sigma(s, x'_1)\| \|\sigma(s, x'_1) - \sigma(s, x'_2)\| \leq L_2 \|x'_1 - x'_2\|$$

mit  $L_2 = C \cdot L_1$ , da  $h_2$  und damit auch  $\sigma$  Lipschitz-stetig ist.

zu i): Die rechte Ungleichung ist trivial mit

$$\Lambda_{T,R} := \sup \{ \|a(s, x')\| : s \leq 1, x' \in \mathbb{R}^{M^2} \}$$

zur linken Ungleichung ergibt sich ein  $c$  mit

$$a(s, x') - c \cdot I \geq 0, c > 0.$$

Angenommen, es gäbe  $(s_n, x'_n) \in (0, 1) \times \{ \|x'\| \leq R \}$  und  $y'_n \in \mathbb{R}^{M^2}$

$$(\text{o.E. } \|y'_n\| = 1), \quad c_n \downarrow 0 \text{ mit } \langle a(s_n, x'_n) - c_n I, y'_n \rangle = 0$$

$$\Rightarrow y_n^T \sigma(s_n, s'_n) \sigma^T(s_n, x'_n) y_n = c_n \|y_n\|^2 = 0$$

Es gibt eine Teilfolge  $(n') \subseteq (n)$  und  $v \in \mathbb{R}^{M^2}$  mit

$$\|y\| = 1, (s, x') \in [0, 1] \times \{ \|x'\| \leq R \} \text{ mit } (s_{n'}, x'_{n'}) \rightarrow (s', x'), y_{n'} \rightarrow y$$

$\Rightarrow y^T \sigma(s, x') \sigma^T(s, x') y = 0 \Rightarrow \sigma^T(s, x') y = 0$ , da  $\|y\| = 1$  ist, kann  $\sigma^{-1}(s, x')$  nicht existieren.

Mit dem oben genannten Korollar 9.1.10 in [34] folgt also, daß die Lösung  $Y'(t)$  eine Dichte bzgl. des Lebesgue-Maßes auf  $\mathbb{R}^{M^2}$  hat; da die Abbildung  $x \rightarrow x'$  von  $\mathbb{M}^M$  in  $\mathbb{R}^{M^2}$  eine Isometrie ist, hat damit auch die Lösung  $Y(t)$  von (3.40) eine Dichte, d.h.  $dP_{Y^{-1}}(t) = p(t, \cdot) dL$ .

Indem man  $h_1 \equiv 0$  wählt, erhält man die Existenz einer Dichte für die Lösung von (3.43).

Man setzt  $F_n(t) := y + \int_{0,t} (s, Y_n(s-), u_n(s-, Y_n(s-))) dA_n(s)$ , dann

erfüllt  $F_n$  die Rekursion

$$(3.44) \quad \begin{aligned} F_n(0) &= y, \quad F_n\left(\frac{j+1}{n}\right) = F_n\left(\frac{j}{n}\right) + \frac{1}{n} h_1\left(\frac{j+1}{n}, Y_n\left(\frac{j}{n}\right), u_n\left(\frac{j+1}{n}, Y_n\left(\frac{j}{n}\right)\right)\right) \\ F_n(t) &= F_n\left(\frac{j}{n}\right), \quad \frac{j}{n} < t < \frac{j+1}{n} \end{aligned}$$

Da  $h_1$  durch  $\|y\| + \|h_1\|$  beschränkt und

$$\|F_n(t) - F_n(s)\| \leq \|h_1\| (t - s + \frac{1}{n}), \quad t > s;$$

also ist  $(F_n)_n$  f.s. relativ kompakt bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz,

d.h.  $(PF_n^{-1})_n$  ist relativ kompakt und alle Grenzverteilungen gehören zu

f.s. stetigen Prozessen, wegen der obigen Ungleichung für  $F_n(t) - F_n(s)$

folgt sogar, daß die Pfade der Grenzverteilungen f.s. absolut stetig sind

mit einer durch  $\|h_1\|$  beschränkten Dichte.

Mit Lemma 3.2 und Bemerkung 3.3. folgt, daß  $(P(Y_n, F_n, B_n)^{-1})_n$  relativ kompakt ist und  $B_n$  gegen eine Standard Brown'sche Bewegung konvergiert.

Sei also  $(P(Y_{n,1}, F_{n,1}, B_{n,1})^{-1})_n$  eine konvergente Teilfolge. Nach dem Skorohod'schen Darstellungssatz gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum

$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$  und eine darauf definierte Folge  $(\bar{Y}_n, \bar{F}_n, \bar{B}_n)_{n \geq 0}$  mit

$$P(\bar{Y}_n, \bar{F}_n, \bar{B}_n)^{-1} = P(Y_{n,1}, F_{n,1}, B_{n,1})^{-1} \quad \forall n \geq 1,$$

$$P(\bar{Y}_0, \bar{F}_0, \bar{B}_0)^{-1} = \lim P(Y_{n,1}, F_{n,1}, B_{n,1})^{-1},$$

$$(\bar{Y}_n, \bar{F}_n, \bar{B}_n) \rightarrow (\bar{Y}_0, \bar{F}_0, \bar{B}_0) \text{ } \bar{P}\text{-sicher } (\forall \omega \in \bar{\Omega}).$$

Konkret kann man  $(\bar{\Omega}, \bar{F}, \bar{P}) = ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, L)$  wählen:

Man setzt nun  $\bar{Q}_t := \sigma(\bar{Y}_0(s), \bar{F}_0(s), \bar{B}_0(s); 0 \leq s \leq t)$ .

Sind  $f_1: M^{3M} \rightarrow R$ ,  $f_2: M^M \rightarrow R$  stetig und beschränkt,

$s_1, s_2, s_3 < s < t$ , so liefert die Verteilungskonvergenz

$$\begin{aligned} E f_1(\bar{Y}_0(s_1), \bar{F}_0(s_2), \bar{B}_0(s_3)) f_2(\bar{B}_0(t) - \bar{B}_0(s)) &= \\ = \lim_n E f_1(Y_{n,1}(s_1), F_{n,1}(s_2), B_{n,1}(s_3)) f_2(B_{n,1}(t) - B_{n,1}(s)) &= \\ = E f_1(\bar{Y}_0(s_1), \bar{F}_0(s_2), \bar{B}_0(s_3)) \cdot E f_2(\bar{B}_0(t) - \bar{B}_0(s)), \end{aligned}$$

ebenso für mehr Zeitpunkte, also ist  $(\bar{B}_0(t), \bar{Q}_t)$  ein Wiener-Prozeß. Wählt

man also  $\bar{\Omega} = (0,1)$ ,  $\bar{P} = L$ ,  $\bar{\mathcal{Q}}$  die Lebesgue'sche  $\sigma$ -Algebra,  $\bar{\mathcal{Q}}_t$  die Vervollständigung von  $\bar{\mathcal{Q}}_t$  bzgl.  $L$ , dann erhält man eine vollständige, rechtsstetige, stochastische Basis  $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{Q}}, \bar{\mathcal{Q}}_t, \bar{P})$  mit der Standard Brown'schen Bewegung  $\bar{B}_0$ , dem absolut stetigen Prozeß  $\bar{F}_0$  mit der an  $(\bar{\mathcal{Q}}_t)_t$  adaptierten durch  $|h_1|$  beschränkten Dichte  $\bar{F}'_0$ .

Aus der Identität der Verteilungen  $\bar{P}(\bar{Y}_n, \bar{F}_n, \bar{B}_n)^{-1}$  und  $P(Y_{n,1}, F_{n,1}, B_{n,1})^{-1}$  ergibt sich die Existenz von  $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots$  iid mit  $\bar{P}\bar{\xi}_1 = P\xi_1^{-1}$ ; setzt man  $\bar{\xi}_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{\xi}_j$ , dann gelten mit  $\bar{A}_n(t) := A_n(t)$ ,  $\bar{B}_n(t) := \sum_{j \geq 1} \bar{\xi}_{n,j} \mathbb{1}_{[\frac{j}{n}, \infty[}$

die Aussagen (3.41) - (3.44) auch für die quergestrichenen Größen  $\bar{Y}_n, \bar{F}_n$ .

Man zeigt nun:

$$\begin{aligned} \bar{G}_n(\cdot) &:= \int_{[0, \cdot]} h_2(s, \bar{Y}_n(s-)) d\bar{B}_n(s) + \\ (3.46) \quad &\int_{[0, \cdot]} h_2(s, \bar{Y}_0(s)) d\bar{B}_0(s) =: \bar{G}_0(\cdot) \end{aligned}$$

Sei  $f_{n,0} = f_{n,1} = \{\emptyset, \Omega\}$ ;  $f_{n,2j+1} = f_{n,2j} = \sigma(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_j)$ ,  $j \geq 1$

$$T_{n,j} := \frac{j}{2n}; \dot{Y} := \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \dot{X}_{n,2j} := \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,2j} \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\dot{X}_{n,1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \dot{X}_{n,2j+1} := \begin{pmatrix} \bar{F}_n(\frac{j}{n}) - \bar{F}_n(\frac{j-1}{n}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, n-1$$



Für  $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{M}^M$  setze  $H(s, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & h_2(s, x_1 + x_4) \end{pmatrix}$

$$\dot{x}_n(t) := \sum_{j \geq 1} \dot{x}_{n,j}^{-1} [T_{n,j}^{\infty}] (t);$$

die Lösung  $\dot{z}_n(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_{1,n}(t) & \dot{z}_{2,n}(t) \\ \dot{z}_{3,n}(t) & \dot{z}_{4,n}(t) \end{pmatrix}$  von

$$(3.47) \quad \dot{z}_n(t) = \dot{y} + \int_{[0,t]} H(s, \dot{z}_n(s-)) d\dot{x}_n(s)$$

genügt der Rekursion

$$(3.48) \quad \begin{aligned} \dot{z}_n(0) &= \dot{y} \\ \dot{z}_n\left(\frac{j+1}{2n}\right) &= \dot{z}_n\left(\frac{j}{2n}\right) + H\left(\frac{j+1}{2n}, \dot{z}_n\left(\frac{j}{2n}\right)\right) \dot{x}_{n,j+1} \\ \dot{z}_n(t) &= \dot{z}_n\left(\frac{j}{2n}\right), \quad \frac{j}{2n} < t < \frac{j+1}{2n} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort  $\dot{z}_{2,n} \equiv \dot{z}_{3,n} \equiv 0$ ,

$$\dot{z}_{1,n}\left(\frac{1}{2n}\right) = \dot{y}, \quad \dot{z}_{1,n}\left(\frac{2j+1}{2n}\right) = \dot{z}_{1,n}\left(\frac{2j-1}{2n}\right) + F_n\left(\frac{j}{n}\right) - F_n\left(\frac{j-1}{n}\right)$$

also:

$$\dot{z}_{1,n}(t) = \begin{cases} \dot{y} & , 0 \leq t < \frac{1}{2n} \\ \bar{F}_n\left(t - \frac{1}{2n}\right) & , \frac{1}{2n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{und } \dot{z}_{1,n}\left(\frac{2j+1}{2n}\right) = F_n^-\left(\frac{j}{n}\right)$$

Aus (3.41) und (3.42) folgt

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \bar{y}_n(t) &= \bar{F}_n(t) + \bar{G}_n(t) \quad \text{bzw.} \\ \bar{y}_n\left(\frac{j}{n}\right) &= \bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) + \bar{G}_n\left(\frac{j}{n}\right) \quad \text{und für } \bar{G}_n \text{ gilt} \\ \bar{G}_n\left(\frac{j+1}{n}\right) &= \bar{G}_n\left(\frac{j}{n}\right) + h_2\left(\frac{j+1}{n}, \bar{y}_n\left(\frac{j}{n}\right)\right) \bar{\xi}_{n,j+1} = \\ &= \bar{G}_n\left(\frac{j}{n}\right) + h_2\left(\frac{j+1}{n}, \bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) + \bar{G}_n\left(\frac{j}{n}\right)\right) \bar{\xi}_{n,j+1} \end{aligned}$$

Aus (3.48) ergibt sich

$$(3.50) \quad \begin{aligned} \dot{z}_{4,n}(0) &= 0, \quad \bar{y}_n(0) = \dot{y} = \bar{F}_n(0) + \dot{z}_{4,n}(0) \\ \dot{z}_{4,n}\left(\frac{j+1}{n}\right) &= \dot{z}_{4,n}\left(\frac{2(j+1)}{2n}\right) = \dot{z}_{4,n}\left(\frac{2j}{2n}\right) + h_2\left(\frac{2(j+1)}{2n}, \right. \\ &\quad \left. \dot{z}_{1,n}\left(\frac{2(j+1)}{2n}\right) + \dot{z}_{4,n}\left(\frac{2j}{2n}\right)\right) \bar{\xi}_{n,j+1} = \\ &= \dot{z}_{4,n}\left(\frac{j}{n}\right) + h_2\left(\frac{j+1}{n}, \bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) + \dot{z}_{4,n}\left(\frac{j}{n}\right)\right) \bar{\xi}_{n,j+1} \end{aligned}$$

also ist  $\dot{z}_{4,n}(\cdot) \equiv \bar{G}_n(\cdot)$ .

Nach Beispiel II.2 ergeben sich die (modifizierten) lokalen Charakteristiken von  $\dot{X}_n$  als

$$\begin{aligned}\tilde{C}_n &\equiv 0, \quad v_n(dx \times ds) = \sum_{j \geq 1} \frac{\delta_j}{2n} (ds) P(\dot{X}_{n,j} \in dx \mid f_{n,j-1}) \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{\delta_{2j+1}}{2n} (ds) \left[ \bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) - \bar{F}_n\left(\frac{j-1}{n}\right) \right] (dx_1) + \frac{\delta_j}{n} (ds) P(\bar{\xi}_{n,j} \in dx_4) \\ \tilde{B}_n(t) &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{[T_{n,j}, \infty[} (t) E(f(\dot{X}_{n,j}) \mid f_{n,j-1}) = \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{[ \frac{2j+1}{2n}, \infty[} (t) f\left(\begin{pmatrix} \bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) - \bar{F}_n\left(\frac{j-1}{n}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + \\ &+ \sum_{j \geq 1} \frac{1}{[ \frac{j}{n}, \infty[} (t) E f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Man zeigt nun, daß die Voraussetzungen von Satz II. 10, II.1 - 4, erfüllt sind. Voraussetzungen II.3 und 4 sind erfüllt, da der Anfangspunkt  $\dot{y}$  konstant und H Lipschitz-stetig ist.

Zu II. 1 i) und ii) : Seit  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}|\bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) - \bar{F}_n\left(\frac{j-1}{n}\right)| &\leq |h_1| \cdot \frac{1}{n} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \\ P(|\bar{\xi}_{n,j}| > \epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon^2 \cdot n} E|\xi_1|^2 \cdot 1_{|\xi_1| > \sqrt{n} \epsilon}, \text{ für } n \geq n_0 \text{ ist} \\ v_n(\{|x| > \epsilon\} \times [0,1]) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} E|\xi_1|^2 \cdot 1_{|\xi_1| > \sqrt{n} \epsilon} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Also I i) und ii) erfüllt mit  $v \equiv 0$

Zu II. 1 iv):  $f(x) = x$  für  $|x| \leq \frac{1}{2}$ ,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) - \bar{F}_n\left(\frac{j-1}{n}\right)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall j \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\sum_{j \geq 1} \frac{1}{[ \frac{2j+1}{2n}, \infty[} (t) f\left(\begin{pmatrix} \bar{F}_n(t_n) - \bar{F}_n\left(\frac{j-1}{n}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \\ = \begin{pmatrix} \bar{F}_n\left(\frac{2(nt)-1}{2n}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{F}_0(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\bar{P} - \text{f.s. gleichmäßig}\end{aligned}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \cdot 1_{\|\bar{\xi}_{n,j}\| \leq \frac{1}{2}} + f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix}\right) \cdot 1_{\|\bar{\xi}_{n,j}\| > \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \|E f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix}\right)\| = (\bar{E} \bar{\xi}_{n,j} = 0)$$

$$= \|E \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \cdot 1_{\|\bar{\xi}_{n,j}\| > \frac{1}{2}} + E f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix}\right) \cdot 1_{\|\bar{\xi}_{n,j}\| > \frac{1}{2}}\|$$

$$\leq E(\|\bar{\xi}_{n,j} + 1\|) \cdot 1_{\|\bar{\xi}_{n,j}\| > \frac{1}{2}} \leq 3 E \|\bar{\xi}_{n,j}\| \cdot 1_{\|\bar{\xi}_{n,j}\| > \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{n}} E \|\bar{\xi}_1\| \cdot 1_{\|\bar{\xi}_1\| > \frac{1}{2\sqrt{n}}} \leq \frac{6}{n} \|\bar{\xi}_1\|^2 \cdot 1_{\|\bar{\xi}_1\| > \frac{1}{2\sqrt{n}}} \Rightarrow$$

$$(+)\sum_{j \geq 1} \|E f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix}\right)\| \cdot 1_{\left[\frac{1}{n}, \infty\right]}(1) \leq 6 E \|\bar{\xi}_1\|^2 \cdot 1_{\|\xi_1\| > \frac{1}{2\sqrt{n}}} \rightarrow 0$$

also gilt:

$$\sup_{t \leq 1} \|B_n(t) - \begin{pmatrix} \bar{F}_0(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\| \rightarrow 0 \quad \bar{P} - \text{f.s.}$$

zu II. 2): für  $n \geq n_0$  ist

$$\|f\left(\begin{pmatrix} \bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) - \bar{F}_n\left(\frac{j-1}{n}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\| = \left|\bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) - \bar{F}_n\left(\frac{j-1}{n}\right)\right| \leq |h_1| \cdot \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{j \geq 1} \frac{1}{s} \leq \frac{2j+1}{2n} \leq t \quad \|f\left(\begin{pmatrix} \bar{F}_n\left(\frac{j}{n}\right) - \bar{F}_n\left(\frac{j-1}{n}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\| \leq$$

$$|h_1| \left(t - s + \frac{1}{n}\right)$$

$$(+)\text{ und }(++)\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_s^t \|dB_n(\tau)\| \leq |h_1| (t-s) \quad \bar{P} - \text{f.s.}$$

$$\text{also } \phi_0(t) = |h_1| \cdot t$$

Zu II. 1. iii):

$$C_n(p, q, p', q') \equiv 0 \quad \text{f.s.,}$$

aus II. 2 folgt

$$\sum_{s \leq t} \left\| \int_s^t f(x) v_n(dx \times \{s\}) \right\|^2 \rightarrow 0 \quad \bar{P} - \text{f.s.} \quad \forall t$$

Es genügt also, zu zeigen .

$$\begin{aligned} & \int f(p, q)(x) f(p', q')(s) v_n(dx \times (0, t)) = \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\left[ \frac{2j+1}{2n}, \infty \right)} (t) f(p, q) \left( \begin{pmatrix} \bar{F}_n(t_n - \bar{F}_n(\frac{j-1}{n}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \\ & \quad \cdot f(p', q') \left( \begin{pmatrix} \bar{F}_n(t_n - \bar{F}_n(\frac{j-1}{n}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &+ \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\left[ \frac{1}{n}, \infty \right)} (t) E f(p, q) \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \right) \cdot f(p', q') \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \right) \\ &+ \begin{cases} t, & (p, q) = (p', q'), p, q > M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \bar{F} - f.s. \quad \forall \frac{t}{n} \end{aligned}$$

das folgt aber sofort wegen:

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \Rightarrow & \left| f(p, q) \left( \begin{pmatrix} \bar{F}_n(\frac{1}{n}) - \bar{F}_n(\frac{j-1}{n}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right. \\ & \left. \cdot f(p', q') \left( \begin{pmatrix} \bar{F}_n(\frac{1}{n}) - \bar{F}_n(\frac{j-1}{n}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right| \leq |h_1|^2 \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

da  $f(x) = x$  für  $\|x\| \leq \frac{1}{2}$ , ist

$$\begin{aligned} & \left| E(f \otimes f) \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \right) - E \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \right) \otimes \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \right) \right| \leq \\ & \leq E \left| \bar{\xi}_{n,j} \right|^2 \frac{1}{|\bar{\xi}_{n,j}| > \frac{1}{2}} + P \left( |\bar{\xi}_{n,j}| > \frac{1}{2} \right) \leq \\ & \leq 5 E \left| \bar{\xi}_{n,j} \right|^2 \frac{1}{|\bar{\xi}_{n,j}| > \frac{1}{2}} = \frac{5}{n} E \left| \bar{\xi}_1 \right|^2 \frac{1}{|\bar{\xi}_1| > \frac{1}{2} \sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$E \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \right) \otimes \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{n} E \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_1 \end{pmatrix} \right) \otimes \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{also: } \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\left[ \frac{1}{n}, \infty \right)} (t) E(f \otimes f) \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_{n,j} \end{pmatrix} \right) + t \cdot E \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_1 \end{pmatrix} \right) \otimes \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_1 \end{pmatrix} \right)$$

Nach Satz II. 10 gilt damit:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_n \\ \dot{Z}_n \end{pmatrix} \stackrel{D}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Z}_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{X}_0 = \begin{pmatrix} \bar{F}_0 & 0 \\ 0 & \bar{B}_0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0(t) &= \dot{y} + \int_{0,t} H(s, \dot{Z}_0(s-)) d\dot{X}_0(s) = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{F}_0(t) & 0 \\ 0 & \int_{0,t} h_2(s, \bar{F}_0(s) + \bar{Z}_{4,0}(s), d\bar{B}_0(s)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man wendet nun nochmals den Skorohod'schen Darstellungssatz an und erhält eine vollständige rechtsstetige, stochastische Basis

$([0,1], \bar{Q}, (\bar{Q}_t)_t, L), [0,1] = \bar{\Omega}, L = \bar{P}$ , darauf definierte stochastische Prozesse  $(\bar{X}_n, \bar{Z}_n)_{n \geq 0}$ , adaptiert an  $(\bar{Q}_t)_t$  und iid Zufallsvariable  $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots$

mit:

$$P(\bar{X}_n, \bar{Z}_n)^{-1} = P(\bar{X}_n, \bar{Z}_n)^{-1} \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$(\bar{X}_n, \bar{Z}_n) \rightarrow (\bar{X}_0, \bar{Z}_0) \quad \forall \omega \in [0,1]; \quad \bar{L} \bar{\xi}_1^{-1} = \bar{L} \bar{\xi}_1^{-1} = P \bar{\xi}_1^{-1}.$$

Damit gelten (3.41) - (3.50) für die entsprechenden Prozesse

$\bar{Y}_n, \bar{F}_n, \bar{B}_n, \bar{G}_n, \bar{Z}_n$  und  $\bar{X}_n \cdot \bar{Z}_n(\omega) \rightarrow \bar{Z}_0(\omega) \quad \forall \omega$  in der Skorohod-Topologie; also,

da  $\bar{Z}_0(\omega)$  stetig ist, auch gleichmäßig auf  $[0,1]$ , mit  $\bar{Z}_{1,0} = \bar{F}_n$  und  $\bar{Z}_{4,n} = \bar{G}_n$

folgt:  $\sup_t \|\bar{Z}_{1,n}(t, \omega) - \bar{F}_0(t, \omega)\| \rightarrow 0 \quad \forall \omega$  und

$\sup_t \|\bar{G}_n(t, \omega) - \bar{Z}_{4,0}(t, \omega)\| \rightarrow 0 \quad \forall \omega$  und damit

auch  $\sup_t \|\bar{Z}_{1,n}(t, \omega) - \bar{F}_n(t, \omega)\| \rightarrow 0 \quad \forall \omega$ .

Daraus folgt:  $\sup_t \|\bar{F}_n(t, \omega) + \bar{G}_n(t, \omega) - \bar{F}_0(t, \omega) - \bar{Z}_{4,0}(t, \omega)\| \rightarrow 0 \quad \forall \omega$

Wenn man nun  $\bar{Y}_n := \bar{F}_n + \bar{G}_n, n \geq 1$  und  $\bar{Y}_0 := \bar{F}_0 + \bar{Z}_{4,0}$  setzt, so ist

$\lim_n \sup_{t \leq 1} \|\bar{Y}_n(t, \omega) - \bar{Y}_0(t, \omega)\| = 0$  und (da  $\bar{F}_0(t, \omega)$  absolut stetig

ist mit  $\| F'_0 \| \leq \| h_1 \|$

$$(3.50) \quad \begin{aligned} \bar{Y}_0(t) &= \bar{F}_0(t) + \int_{]0,t]} h_2(s, \bar{Y}_0(s)) d\bar{B}_0(s) \\ &= y + \int_{]0,t]} \bar{F}'_0(s) ds + \int_{]0,t]} h_2(s, \bar{Y}_0(s)) d\bar{B}_0(s) \end{aligned}$$

Man kann o. B. d. A. annehmen, daß  $\bar{F}'_0$  adaptiert und vorhersagbar ist:

Ist  $\mathcal{P}$  die  $\sigma$ -Algebra der vorhersagbaren Ereignisse, so setzt man

$m(A) = E \int_A 1 d\bar{F}_0$ . Dann ist  $m$  das Doléans-Maß von  $\bar{F}_0$ . Andererseits,

ist  $m$  absolut stetig bzgl.  $L \times P$ , also gibt es ein  $P$ -meßbares  $f$  mit

$$m(A) = \iint_A 1 f d(L \times P) \text{ und } P(\omega \mid \int_{]0,t]} 1 f(s, \omega) ds \neq \bar{F}_0(t, \omega) \text{ für ein } t) = 0.$$

Im Folgenden wird der Doppelstrich weggelassen. Man setzt nun wie am Anfang des Beweises.

$$\phi(s) := -h_2^{-1}(s, Y_0(s)) F'_0(s).$$

$$B_1(t) := B_0(t) - \int_{]0,t]} \phi(s) ds,$$

$$w(t) := \sum_{p,q=1}^M \int_{]0,t]} \phi(p,q)(s) dB_0(p,q)(s)$$

$$\xi(t) := \varepsilon(w)(t) = \exp \left\{ -w(t) - \frac{1}{2} \langle w, w \rangle(t) \right\} =$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left\{ - \sum_{p,q=1}^M \int_{]0,t]} \phi(p,q)(s) dB(p,q)(s) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^M \int_{]0,t]} \phi^2(p,q)(s) ds \right\} \end{aligned}$$

Durch  $dQ := \xi(1) dP$  wird eine Wahrscheinlichkeit auf  $(\Omega, \mathcal{Q}, (\mathcal{Q}_t)_t)$

definiert, bzgl. der  $B_1$  eine Standard Brown'sche Bewegung ist. Ist  $Y_1$

die Lösung von  $Y_1(t) = y + \int_{]0,t]} h_2(s, Y_1(s)) dB_1(s)$ , so hat  $Q Y_1^{-1}(t)$

eine Dichte. Andererseits ist  $Y_1(t) = y + \int_{]0,t]} F'_0(s) ds +$

$$\int_{]0,t]} h_2(s, Y_1(s)) dB_0(s) \mid Q - \text{fast sicher.}$$

Es ist jedoch  $\xi(1, \omega) > 0$   $P$  - fast sicher und damit  $Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$   
also  $P \ll Q$  d.h. die obige Gleichung gilt auch  $P$  - fast sicher, also ist

$Y_1$  Lösung von (3.50) d.h. identisch mit  $Y_0$ .

Insbesondere hat damit  $Q Y_0^{-1}(t)$  eine Dichte.

Man zeigt nun

$$(3.51) \quad \int_{]0, \cdot]} h_1(s, Y_n(s-), u_n(s-, Y_n(s-))) dA_n(s) \\ + \int_{]0, \cdot]} h_1(s, Y_0(s), u_0(s, Y_0(s))) ds$$

nach  $P$ -Wahrscheinlichkeit.

Wegen  $P \ll Q$ , genügt es nachzuweisen, daß (3.51) nach  $Q$  - Wahrscheinlichkeit gilt. Dazu setzt man

$$h_n(s, Y_n) := \sum_{j \geq 0} \frac{1}{n} \left[ \frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right] (s) h_1\left(\frac{j+1}{n}, Y_n\left(\frac{j}{n}\right), u_n\left(\frac{j+1}{n}, Y_n\left(\frac{j}{n}\right)\right)\right)$$

$$\text{für } t = \frac{j}{n} \text{ ist } \int_{]0, t]} h_n(s-, Y_n) ds =$$

$$= \int_{]0, t]} h_1(s, Y_n(s-), u_n(s-, Y_n(s-))) dA_n(s),$$

also gilt für  $t \in (0, 1)$ :

$$\left| \int_{]0, t]} h_n(s-, Y_n) ds - \int_{]0, t]} h_1(s, Y_n(s-), u_n(s-, Y_n(s-))) dA_n(s) \right| \leq \\ \leq \|h_1\| \cdot \frac{1}{n}$$

Für (3.51) muß damit also gezeigt werden:

$$\int_{]0, \cdot]} h_n(s-, Y_n) ds \rightarrow \int_{]0, \cdot]} h_1(s, Y_0(s), u_0(s, Y_0(s))) ds$$

nach  $Q$  - Wahrscheinlichkeit.

Dafür ist es hinreichend, wenn man für jedes  $t \in [0, 1]$  zeigt:

$$\int_{]0, t]} h_n(s-, Y_n) ds \rightarrow \int_{]0, t]} h_1(s, Y_0(s), u_0(s, Y_0(s))) ds$$

nach  $Q$  - Wahrscheinlichkeit, es gilt nämlich

$(F_n)_{n \geq 0}$  zufällige Funktionen mit  $F_n(0) = 0$  Q-f.s.,  
 $Q(\omega \mid \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t-s| \leq \delta} \|F_n(t, \omega) - F_n(s, \omega)\| = 0) = 1$  und  
 $F_n(t) \rightarrow F_0(t)$  nach Q - Wahrscheinlichkeit für alle  $t \in [0, 1]$ ,  
 dann folgt:  $Q(\omega \mid \sup_{t \leq 1} \|F_n(t, \omega) - F_0(t, \omega)\| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Beweis zu (+++): Man zeigt, daß jede Teilfolge  $(n') \subseteq (n)$  eine Teilfolge  $(n'') \subseteq (n')$  enthält mit

$$Q(\omega \mid \sup_{t \leq 1} \|F_{n''}(t, \omega) - F_0(t, \omega)\| \rightarrow 0) = 1$$

Zu jeder Teilfolge  $(n')$  gibt es eine Teilfolge  $(n'')$ , so daß

$$Q(\omega \mid F_{n''}(q, \omega) \rightarrow F_0(q, \omega) \quad \forall q \in Q \cap [0, 1]) = 1$$

Damit gilt also

$$Q(\omega \mid F_{n''}(q, \omega) \rightarrow F_0(q, \omega) \quad \forall q \in Q \cap [0, 1],$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n'' \rightarrow \infty} \sup_{|t-s| \leq \delta} \|F_{n''}(t, \omega) - F_n(s, \omega)\| = 0) = 1$$

Ist  $\omega$  aus dieser Menge, dann ist nach Satz A. 8  $(F_{n''}(\omega))_n$  relativ kompakt bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz mit stetigen Grenzwerten, diese sind aber auf  $Q \cap (0, 1)$  und damit eindeutig durch  $F_0(\omega)$  bestimmt, also gilt:  $\sup_{t \leq 1} \|F_{n''}(t, \omega) - F_0(t, \omega)\| \rightarrow 0$ .

Da  $(\int_{]0, \cdot]} h_n(s-, Y_n) ds)_n$  die Voraussetzungen in (++) erfüllt, braucht

also nur noch die Konvergenz in jedem  $t$  gezeigt zu werden.

$$\begin{aligned} E_Q \left\| \int_{]0, t]} (h_n(s-, Y_n) - h_1(s, Y_0(s), u_0(s, Y_0(s)))) ds \right\|^2 &= \\ &= E_Q \sum_{i,j=1}^M \left( \int_{]0, t]} (h_n(i, j)(s-, Y_n) - h_1(i, j)(s, Y_0(s), u_0(s, Y_0(s)))) ds \right)^2 < \infty \\ &\leq \sum_{i,j=1}^M E_Q \int_{]0, t]} (h_n(i, j)(s-, Y_n) - h_1(i, j)(s, Y_0(s), u_0(s, Y_0(s))))^2 ds \end{aligned}$$

Da  $\|h_n - h_1\|^2 \leq 2 \|h_1\|$ , genügt es nach dem Satz über die dominierte Konvergenz, wenn



$$(3.52) \quad \begin{aligned} & (L \times Q) \{ (t, \omega) \mid | h_n(i, j)(t, Y_n(\omega)) - \\ & - h_1(i, j)(t, Y_0(t, \omega), u_0(t, Y_0(t, \omega))) | > \epsilon \} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für alle  $i, j \leq M$ ,  $\epsilon > 0$  gilt.

a) Zunächst sei vorausgesetzt, daß  $u_0$  stetig ist und die Träger aller  $u_n$  in einer Kugel  $\{ (t, y) \mid \| y \| \leq R \}$  liegen. Da  $u_n \rightarrow u_0$  nach  $L \times L_M$ -Maß, gibt es eine Teilfolge  $(n')$  mit  $u_{n'} \rightarrow u_0$  fast gleichmäßig bzgl.  $L \times L_M$ . Kann man also für diese Teilfolge  $(n')$  zeigen, daß sie (3.51) erfüllt, so gilt dies dann auch für die gesamte Folge, denn jede Teilfolge enthält eine weitere Teilfolge, die gegen den Grenzwert  $\int_{0, \cdot} h_1(s, Y_0(s), u_0(s, Y_0(s))) ds$  nach Wahrschein-

lichkeit konvergiert, also auch die gesamte Folge. Also o. B. d. A

$u_n \rightarrow u_0$  fast gleichmäßig bzgl.  $L \times L_M$ . Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $A_\epsilon$  mit  $(L \times L_M)(A_\epsilon) < \epsilon$  und

$$\sup \{ \| u_n(t, y) - u_0(t, y) \| \mid (t, y) \notin A_\epsilon \} \rightarrow 0.$$

Sei  $p(t, y)$  die Dichte der Verteilung von  $Q Y_0^{-1}(t)$ , dann ist

$$\int_{[0,1]} \int_{\mathbb{R}^M} p(t, y) d(L \times L_M)(t, y) = 1. \text{ Also gilt auch:}$$

Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $A_\epsilon$  mit

$$\int \int 1_{A_\epsilon} p(t, y) d(L \times L_M)(t, y) < \epsilon \text{ und}$$

$$\sup \{ \| u_n(t, y) - u_0(t, y) \| \mid (t, y) \in A_\epsilon \} \rightarrow 0$$

Betrachte für vorgegebenes  $\epsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon & < \| h_n(s, Y_n(\omega)) - h_1(s, Y_0(s, \omega), u_0(s, Y_0(s, \omega))) \| \leq \\ & \leq L_1 \frac{1}{n} + L_1 \| Y_n(\lfloor \frac{ns}{n} \rfloor, \omega) - Y_0(\lfloor \frac{ns}{n} \rfloor, \omega) \| + \\ & + L_1 \| Y_0(\lfloor \frac{ns}{n} \rfloor, \omega) - Y_0(s, \omega) \| + \\ & + L_1 \| u_n(\frac{\lfloor ns \rfloor + 1}{n}, Y_n(\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}, \omega)) - \\ & - u_0(\frac{\lfloor ns \rfloor + 1}{n}, Y_n(\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}, \omega)) \| + \\ & + L_1 \| u_0(\frac{\lfloor ns \rfloor + 1}{n}, Y_n(\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}, \omega)) - \end{aligned}$$

$$- u_0 \left( \frac{[ns]+1}{n} -, Y_0 \left( \frac{[ns]}{n} -, \omega \right) \right) + \\ + L_1 \left| u_0 \left( \frac{[ns]+1}{n} -, Y_0 \left( \frac{[ns]}{n} -, \omega \right) \right) - u_0 \left( s, Y_0 \left( s, \omega \right) \right) \right|$$

Es gibt ein  $n_1$  mit

$$\sup \{ \| u_n(t, y) - u_0(t, y) \| \mid (t, y) \notin A_\varepsilon \} \leq \frac{\varepsilon}{16 \cdot L_1} \quad \forall n \geq n_1$$

Es gibt ein  $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{16 \cdot L_1}$  mit

$$\sup \{ \| u_0(s, y) - u_0(t, x) \| \mid |t-s| \leq \delta_1, \| y-x \| \leq \delta_1 \} < \frac{\varepsilon}{16 \cdot L_1},$$

Es gibt ein  $\delta_2 < \delta_1$ , so daß für

$$A_{\varepsilon, \delta_2} := \{ (t, y) \mid \inf \{ |t-s| + \| y-x \| \mid (s, x) \in A_\varepsilon \} < \delta_2 \} \text{ gilt} \\ \int \int_{A_{\varepsilon, \delta_2}} p(t, y) d(L \times L_M)(t, y) < 2\varepsilon$$

$Q(\omega \mid Y_n(\omega) \rightarrow Y_0(\omega)) = 1$ , da  $Y_0(\omega)$  stetig ist, folgt:

$$Q(\omega \mid \sup_{t \leq 1} \| Y_n(t, \omega) - Y_0(t, \omega) \| \rightarrow 0) = 1$$

Es gibt ein  $\delta_3 < \min \{ \frac{1}{4} \delta_2, \frac{\varepsilon}{16 L_1} \}$ ,  $n_2 = n_2(\delta_3) > n_1$ ,  $\frac{1}{n_2} < \delta_2$

$$\Omega_{\delta_3} := \{ \omega \mid \sup \{ \| Y_n(t, \omega) - Y_0(t, \omega) \| \mid t \leq 1, n \geq n_2 \} > \delta_3 \},$$

$$\text{so daß } Q(\Omega_{\delta_3}) < \frac{\varepsilon}{16 L_1}, \quad \delta_4 < \delta_3$$

$$\Omega'_{\delta_4} := \{ \omega \mid \sup \{ \| Y_0(t, \omega) - Y_0(s, \omega) \| \mid |t-s| < \delta_4 \} > \delta_3 \}$$

$$\text{mit } Q(\Omega'_{\delta_4}) < \frac{\varepsilon}{16 L_1} \quad \text{für } n \geq n_2$$

Damit wird für  $n \geq \max \{ n_2, \frac{1}{\delta_4} \}$ :

$$\{ (s, \omega) \mid \| h_n(s-, Y_n(\omega)) - h_1(s, Y_0(s, \omega), u_0(s, Y_0(s, \omega))) \| > \varepsilon \}$$

$$\subseteq [0, 1] \times \Omega_{\delta_3} \cup [0, 1] \times \Omega'_{\delta_4} \cup$$

$$\cup \{ (t, \omega) \mid (t, Y_0(t, \omega)) \in A_{\varepsilon, \delta_2} \}$$

Diese Inklusion ergibt sich aus der oben betrachteten Ungleichung. Dies sieht man am folgenden Beispiel:

Sei  $(t, Y_0(t, \omega)) \notin A_{\epsilon, \delta_2}$ ,  $\|Y_n(t, \omega) - Y_0(t, \omega)\| \leq \delta_3$

$$\sup \{ \|Y_n(s, \omega) - Y_0(s, \omega)\| \mid s \leq 1 \} \leq \delta_3$$

$$\sup \{ \|Y_0(r, \omega) - Y_0(s, \omega)\| \mid |s-r| < \delta_4 \} \leq \delta_3$$

dann ist  $|t - \frac{[nt]+1}{n}| \leq \delta_4$  und

$$\|Y_n(\frac{[nt]}{n}, \omega) - Y_0(t, \omega)\| \leq$$

$$\leq \|Y_n(\frac{[nt]}{n}, \omega) - Y_0(\frac{[nt]}{n}, \omega)\| +$$

$$+ \|Y_0(\frac{[nt]}{n}, \omega) - Y_0(t, \omega)\| \leq 2\delta_3,$$

$$\text{also } (d((\frac{[nt]+1}{n}, Y_n(\frac{[nt]}{n}, \omega)), (t, Y_n(t, \omega)))) \leq \delta_4 + \delta_3 < \delta_2$$

also  $(\frac{[nt]+1}{n}, Y_n(\frac{[nt]}{n}, \omega)) \notin A_\epsilon$  und damit

$$L_1 \|u_n(\frac{[nt]+1}{n}, Y_n(\frac{[ns]}{n}, \omega)) u_0(\frac{[nt]+1}{n}, Y_n(\frac{[ns]}{n}, \omega))\| \leq \frac{\epsilon}{16}$$

Für die übrigen Summanden analog. Damit wird

$$(L \times Q) \{ (s, \omega) \mid \|h_n(s-, Y_n(\omega)) - h_1(s, Y_0(s, \omega), u_0(s, Y_0(s, \omega)))\| > \epsilon \}$$

$$\leq \frac{\epsilon}{8L_1} + (L \times Q) \{ (s, \omega) \mid (s, Y_0(s, \omega)) \in A_{\epsilon, \delta_2} \}$$

$$(L \times Q) \{ (s, \omega) \mid (s, Y_0(s, \omega)) \in A_{\epsilon, \delta_2} \} =$$

$$= \int_Q \{ \omega \mid (s, Y_0(s, \omega)) \in A_{\epsilon, \delta} \} dL(s) =$$

$$= \int_{[0,1]} Q Y_0^{-1} \{ y \mid (s, y) \in A_{\epsilon, \delta_2} \} dL(s) =$$

$$= \int_{[0,1]} \left( \int 1_{\{y(s,y) \in A_{\epsilon, \delta_2}\}} p(s,y) dL_M(y) \right) dL(s)$$

$$\int 1_{A_{\epsilon, \delta_2}}(s,y) p(s,y) d(L \times L_M)(s,y) < 2\epsilon$$

Damit gilt:

$$(L \times Q) \{ (s, \omega) \mid \|h_n(s-, Y_n(\omega)) - h_1(s, Y_0(s, \omega), u_0(s, Y_0(s, \omega)))\| > \epsilon \}$$

$$\leq 3\epsilon$$

für  $n \geq \max \{ n_2, \frac{1}{\delta_4} \}$  und daraus folgt (3.52) und damit auch (3.51)

b) Sei nun  $u_0$  eine Borel-Funktion.

Sei  $\epsilon > 0$  beliebig vorgegeben.

Es gibt ein  $R > 0$ , so daß

$$Q \{ \omega \mid \sup_{t \leq 1} \| Y_n(t, \omega) \| > R \} < \epsilon \quad \forall n \geq 0.$$

Im Folgenden betrachtet man nun alle Funktionen eingeschränkt auf

$$[0,1] \times \{ \| y \| \leq R \} \stackrel{C}{=} [0,1] \times M^M. \text{ Wie in a) sei wieder O. B. d. A.}$$

angenommen, daß  $u_n \rightarrow u_0$  fast gleichmäßig bezgl.  $L \times L_M$

(auf  $[0,1] \times \{ \| y \| \leq R \}$ ). Es gibt eine Folge  $(g_m)_m$  von stetigen

Funktionen mit  $g_m \rightarrow u_0$  fast gleichmäßig.

$$\text{Es gibt ein } A_\epsilon \text{ mit } \int \int p(t,y) 1_{A_\epsilon}(t,y) d(L \times L_M)(t,y) \leq \epsilon$$

$$\text{und } \sup \{ \| u_0 - g_m \| (t,y) \mid (t,y) \notin A_\epsilon \} \rightarrow 0$$

Es gibt ein  $\delta_1$ , so daß für

$$A_{\epsilon, \delta_1} \{ (t,y) \mid \inf \{ |t-s| + \| x-y \| \mid (s,x) \in A_\epsilon \} < \delta_1 \}$$

$$\text{gilt: } \int \int 1_{A_{\epsilon, \delta_1}}(t,y) p(t,y) d(L \times L_M)(t,y) \leq 2\epsilon$$

$$\text{Es gibt ein } \delta_2 < \{ \frac{\delta_1}{4}, \frac{\epsilon}{16L_1} \}, n_1 = n_1(\delta_2), \frac{1}{n_1} < \delta_1$$

$$\Omega_1 := \{ \omega \mid \sup \{ \| Y_n(t, \omega) \| \mid t \leq 1, n \geq 0 \} > R \}$$

$$\Omega_{\delta_2} := \{ \omega \notin \Omega_1 \mid \sup \{ \| Y_n(t, \omega) - Y_0(t, \omega) \| \mid n \geq n_1, t \leq 1 \} > \delta_2 \}$$

$$\text{mit } Q \Omega_{\delta_2} \geq \frac{\epsilon}{16}, \text{ ein } \delta_3 < \delta_2 \text{ mit}$$

$$\Omega'_{\delta_3} := \{ \omega \notin \Omega_1 \mid \sup \{ \| Y_0(t, \omega) - Y_0(s, \omega) \| \mid |t-s| \leq \delta_3 \} > \delta_2 \}$$

$$\text{und } Q \Omega'_{\delta_3} < \frac{\epsilon}{16}, m_1 \text{ so groß, daß}$$

$$\sup \{ \| u_0(t,y) - g_m(t,y) \| \mid (t,y) \notin A_\epsilon, m \geq m_1 \} < \frac{\epsilon}{16}$$

$$\text{Betrachte } v_n := u_n - u_0 + g_{m_1}, n := 0, 1, \dots$$

$$\epsilon < \| h_n(s, Y_n) - h_1(s, Y_0(s, Y_0(s))) \| \leq$$

$$\leq \| h_1(\frac{[ns]+1}{n}, Y_n(\frac{[ns]}{n}), u_n(\frac{[ns]+1}{n}, Y_n(\frac{[ns]}{n})) -$$

$$h_1(\frac{[ns]+1}{n}, Y_n(\frac{[ns]}{n}), v_n(\frac{[ns]+1}{n}, Y_n(\frac{[ns]}{n})) \| +$$

$$+ \| h_1(\frac{[ns]+1}{n}, Y_n(\frac{[ns]}{n}), v_n(\frac{[ns]+1}{n}, Y_n(\frac{[ns]}{n})) -$$

$$+ h_1(s, Y_0(s), v_0(s, Y_0(s))) \| +$$

$$\begin{aligned}
 & + \| h_1 (s, Y_0(s), v_0(s, Y_0(s))) - h_1 (s, Y_0(s), u_0(s, Y_0(s))) \| \leq \\
 & \leq L_1 \| u_n ( \frac{[ns]+1}{n} -, Y_n ( \frac{[ns]}{n} - ) ) - v_n ( \frac{[ns]+1}{n} -, Y_n ( \frac{[ns]}{n} - ) ) \| + \\
 & + L_1 \| u_0 (s, Y_0(s)) - v_0 (s, Y_0(s)) \| + \\
 & + \| h_1 ( \frac{[ns]+1}{n}, Y_n ( \frac{[ns]}{n} - ), v_n ( \frac{[ns]+1}{n} -, Y_n ( \frac{[ns]}{n} - ) ) - \\
 & - h_1 (s, Y_0(s), v_0(s, Y_0(s))) \|
 \end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung folgt nun:

$$\begin{aligned}
 & \{ (t, \omega) \mid \| h_n(t, Y_n(\omega)) - h_1(t, Y_0(t, \omega), u_0(t, Y_0(t, \omega))) \| > \varepsilon \} \\
 & \subseteq [0, 1] \times \Omega_1 \cup [0, 1] \times \Omega_{\delta_2} \cup [0, 1] \times \Omega'_{\delta_3}
 \end{aligned}$$

$$\{ (t, \omega) \mid (t, Y_0(t, \omega)) \in A_{\varepsilon, \delta_1}, \omega \notin \Omega_1 \}$$

$$\begin{aligned}
 & \{ (t, \omega) \mid \omega \notin \Omega_1, \| h_1(s, Y_0(s), v_0(s, Y_0(s))) - \\
 & - h_1( \frac{[ns]+1}{n}, Y_n( \frac{[ns]}{n} -, \omega), v_n( \frac{[ns]+1}{n} -, Y_n( \frac{[ns]}{n} -, \omega) ) \| > \frac{\varepsilon}{16} \}
 \end{aligned}$$

Man sieht dies wie in a), wenn man

$$\| u_n - v_n \| (t, y) = \| u_0 - g_m \| (t, y) \text{ beachtet.}$$

Aus a) folgt, da für  $\omega \notin \Omega_1$  die auftretenden Funktionen durch ihre Einschränkungen auf  $(0, 1) \times \{ \| y \| \leq R \}$  ersetzt werden können.

$$\begin{aligned}
 & (L \times Q) \{ (t, \omega) \mid \omega \notin \Omega_1, \| h_1(s, Y_0(s, \omega), v_0(s, Y_0(s, \omega))) - \\
 & - h_1( \frac{[ns]+1}{n}, Y_n( \frac{[ns]}{n} -, \omega), v_n( \frac{[ns]+1}{n} -, Y_n( \frac{[ns]}{n} -, \omega) ) \| > \frac{\varepsilon}{16} \} \\
 & \leq \varepsilon \text{ für } n \geq n_2 > n_1.
 \end{aligned}$$

Und ebenso wie in a) zeigt man

$$(L \times Q) \{ (t, \omega) \mid \omega \notin \Omega_1, (t, Y_0(t, \omega)) \notin A_{\varepsilon, \delta_1} \} \leq 2\varepsilon.$$

$$(L \times Q) \{ [0, 1] \times \Omega_1 \cup [0, 1] \times \Omega_{\delta_2} \cup [0, 1] \times \Omega'_{\delta_3} \} < 2\varepsilon$$

Insgesamt gilt damit nun (3.51).

Da ansererseits

$$\begin{aligned}
 & y + \int_{]0, \cdot]} h_1(s, Y_n(s-), u_n(s-, Y_n(s-))) dA_n(s) \rightarrow (F_0(\cdot)) p - f.s., \\
 & \text{folgt damit aus (3.50)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_0(t) = y & + \int_{]0, t]} h_1(s, Y_0(s), u_0(s, Y_0(s))) ds + \\
 & + \int_{]0, t]} h_2(s, Y_0(s)) dB_0(s)
 \end{aligned}$$

d.h.  $Y_0$  ist eindeutig bestimmt.

Es wurde also gezeigt:

$(P Y_n^{-1})_n$  relativ kompakt (nach Lemma 3.2) und jeder Häufungspunkt ist die Verteilung  $P Y_0^{-1}$ , also gilt:  $Y_n \xrightarrow{D} Y_0$

### 3.5 Satz:

Für  $n = 1, 2, \dots$  sei  $u_n \in \mathbb{U}$  eine optimale Strategie für (3.41) mit zugehöriger Lösung  $Y_n$ , es sei Voraussetzung 4 erfüllt, dann folgt:

$$J(u_0) = \inf \{ J(u) \mid u \in \mathbb{U} \}$$

### Beweis

Es genügt, wenn man zeigt  $J(u_0) = \min \{ J(u) \mid u \in \mathbb{U} \}$ , denn:

Die Voraussetzungen von [8], Theorem 3.29 sind erfüllt, also gibt es zu

jedem  $\varepsilon > 0$  eine  $\varepsilon$ -optimale Markov-Kontrolle, d.h. ein  $v_\varepsilon \in \mathbb{U}$  mit

$$J(v_\varepsilon) \leq \varepsilon + \inf \{ J(u) \mid u \in \mathbb{U} \}, \text{ also ist}$$

$$\inf \{ J(v) \mid v \in \mathbb{U} \} = \inf \{ J(u) \mid u \in \mathbb{U} \}.$$

Für  $n = 1, 2, \dots$  sei  $Y_n$  die zu  $u_n$  gehörende Lösung von (3.41),  $Y_0$  die zu  $u_0$  gehörende Lösung von (3.40)

Für  $v \in \mathbb{U}$  setze  $v_n = v$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , für  $n = 1, 2, \dots$

sei  $Y'_n$  die zu  $v_n$  gehörende Lösung von (3.41),  $Y'_0$  die zu  $v_0$  gehörende Lösung von (3.40):

$$\text{Nach Satz 3.4 gilt: } Y_n \xrightarrow{D} Y_0, Y'_n \xrightarrow{D} Y'_0.$$

Wegen  $E g(Y_n(1)) \leq E g(Y'_n(1)) \forall n$  folgt:

$$J(u_0) = \lim_n E g(Y_n(1)) \leq \lim_n E g(Y'_n(1)) = J(v)$$

Da jedoch  $u_n$  optimal ist, ist

$$J(u_n) = E g(Y_n(1)) \leq E g(Y_n(1)) = J(v_n),$$

$$\text{also } J(u_0) = \lim_n J(u_n) \leq \lim_n J(v_n) = J(v)$$

### 3.6 Bemerkung

a) In [41] (siehe auch [42]) wird das Problem für

$$Y(t) = y + \int_{]0,t]} u(s) ds + B(t) \epsilon \in \mathbb{R}^1$$

behandelt und explizit gelöst, indem man durch Approximation mit diskreten Prozessen zeigt, daß  $u(x) := \text{sign}(x)$  die optimale Kontrolle ist für das stetige Problem und

$$u_n(x) := \begin{cases} -1 & , x \geq \frac{1}{n} \\ -n x & , -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ +1 & , x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

optimale Kontrolle für das diskrete Problem  $Y_n(0) = y$ ;

$$Y_n\left(\frac{i+1}{n}\right) = Y_n\left(\frac{i}{n}\right) + u_n\left(\frac{i}{n}, Y_n\left(\frac{i}{n}\right)\right) \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \epsilon_{i+1}$$

für  $i = 0, \dots, n-1$ ;  $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$  iid

Man sieht sofort, daß alle Voraussetzungen für Satz 3.4 erfüllt sind.

b) In [44], Theorem 1 und 2 wird unter fast identischen Voraussetzungen die Existenz der in Satz 3.4 benötigten Kontrolle  $u_n$  gezeigt, daß die  $u_n$  für das diskrete Problem selbst diskret sind und daß  $u_n$  gegen eine Kontrolle  $u_0$  konvergiert.

## KAPITEL 4

### VERTEILUNGSKONVERGENZ AUF LOKALKOMPAKTEN LIE - GRUPPEN

Die Aussagen im Paragraphen 2 des vorigen Kapitels treffen nur auf Moore-Gruppen zu, da man mit den vorhandenen Hilfsmitteln nur Aussagen über endlichdimensionale Darstellungen machen konnte. In diesem Kapitel nun soll mit anderen Methoden ein Grenzverteilungssatz für lokalkompakte Lie-Gruppen bewiesen werden. Die Notation und einige wesentliche Hilfsmittel sind aus [18] übernommen.

In [31] wird mit Hilfe der (additiven) Prozesse auf  $G$  das Martingal-Problem gelöst und der zentrale Grenzwertsatz bewiesen. Allerdings muß man sich, da Prozesse betrachtet werden, auf Lie-Gruppen mit abzählbarer Basis für die Topologie beschränken. Mit Hilfe der hier verwandten Methoden kann man den zentralen Grenzwertsatz für Lie-projektive Gruppen beweisen.

Zunächst jedoch zu der benutzten Notation:

$G$  ist eine lokalkompakte Lie-Gruppe und  $\mathcal{B}_G$  die von den offenen Mengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra,  $\mathbb{M}^b(G)$  ( $\mathbb{M}_+^b(G)$ ,  $\mathbb{M}^1(G)$ ) die Menge der reellen, beschränkten (positiven, Wahrscheinlichkeits-) Maße auf  $(G, \mathcal{B}_G)$ .

Man setzt (im Unterschied zu III.2)  $C^b(G) := \{ f: G \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und beschränkt} \}$  mit  $\|f\| := \sup \{ |f(x)| \mid x \in G \}$

$K(G)$  und  $C^0(G)$  sind die Mengen der  $f \in C^b(G)$  mit kompakten Träger bzw. die im Unendlichen verschwindet.

Liegt der Operator  $D$  in der zugehörigen Lie-Algebra, so definiert man die Ableitung von  $f$  bzgl.  $D$  in  $x$  durch

$$Df(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\exp \{tD\} x) - f(x))$$

$$\tilde{D}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x \exp \{tD\}) - f(x))$$



Sei  $\{ D_1, \dots, D_M \}$  eine Basis der Lie-Algebra  $\mathbb{Q}$  über  $\mathbb{G}$ , dann setzt man  $C_2^0(\mathbb{G})$  bzw.  $\tilde{C}_2^0(\mathbb{G})$  als die Räume der zweimal stetig von links bzw. rechts differenzierbaren Funktionen die im Unendlichen verschwinden mit den Normen

$$\| f \|_2 := \| f \| + \sum_{i=1}^M \| D_i f \| + \sum_{i,g=1}^M \| D_i D_g f \| \quad \text{bzw.}$$

$$\| f \|_2^{\sim} := \| f \| + \sum_{i=1}^M \| \tilde{D}_i f \| + \sum_{i,g=1}^M \| \tilde{D}_i \tilde{D}_g f \|$$

und  $\mathcal{D}(\mathbb{G})$  ist der Raum der Funktionen in  $K(\mathbb{G})$ , die beliebig oft differenzierbar sind.

$$C_{2/2} := \{ f \in C_2^0(\mathbb{G}) \cap \tilde{C}_2^0(\mathbb{G}) \mid Df, DD'f \in \tilde{C}_2^0(\mathbb{G}) \quad \forall D, D' \in \mathbb{Q} \}$$

mit der Norm

$$\| f \|_{2/2} := \| f \|_2^{\sim} + \sum_{i=1}^M \| D_i f \|_2^{\sim} + \sum_{i,j=1}^M \| D_i D_j f \|_2^{\sim}$$

Es gilt die folgende Inklusion

$$\mathcal{D}(\mathbb{G}) \subseteq C_{2/2} \subseteq C_2^0(\mathbb{G}) \cap \tilde{C}_2^0(\mathbb{G}) \subseteq C_2^0(\mathbb{G}) \cup \tilde{C}_2^0(\mathbb{G}) \subseteq C^0(\mathbb{G})$$

Definiert man noch die Links- bzw. Rechts-Translation durch

$$L_y f(x) := f(yx) \quad \text{und} \quad R_y f(x) := f(xy) \quad \text{so hat man}$$

$$R_y (C_2^0(\mathbb{G})) \subseteq C_2^0(\mathbb{G}), \quad \| R_x f \|_2 = \| f \|_2,$$

$$L_x (\tilde{C}_2^0(\mathbb{G})) \subseteq \tilde{C}_2^0(\mathbb{G}), \quad \| L_x f \|_2^{\sim} = \| f \|_2^{\sim},$$

Als wesentliches Hilfsmittel bei den folgenden Betrachtungen erweist sich der Wahrscheinlichkeitsoperator:

### 1. Definition

Für  $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{G})$ ,  $f \in C^b(\mathbb{G})$  definiert man den Faltungsoperator

$$T_\mu \quad \text{durch} \quad T_\mu f(x) := \int f(xy) \mu(dy), \quad x \in \mathbb{G}. \quad \text{Ist } \mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{G}),$$

so heißt  $T_\mu$  Wahrscheinlichkeitsoperator.

$T_\mu$  hat die folgenden Eigenschaften ([28], Kap. I; [10], Kap.4.1;

[18], Kap.I) :

(4.11)

- i)  $\mu \in \mathbb{M}^b(\mathcal{G})$ , dann ist  $T_\mu \in L(C^b(\mathcal{G}))$  mit
- $$\|T_\mu f\| = \|f\|; \quad T_\mu(C^0(\mathcal{G})) \subseteq C^0(\mathcal{G}),$$
- $$T_\mu(C_2^0(\mathcal{G})) \subseteq C_2^0(\mathcal{G}); \quad D(T_\mu f) = T_\mu(Df) \quad \forall D \in \mathcal{G},$$
- $$T_\mu f_2 \leq_2, \quad L_x(T_\mu) = T_\mu(L_x),$$
- ii)  $\mu, \nu \in \mathbb{M}_+^b(\mathcal{G}) : T_\mu + T_\nu = T_{\mu + \nu}$   
 $a, b \in \mathbb{R}_+ : T_{a\mu + b\nu} = a T_\mu + b T_\nu$
- iii) für  $(\mu_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{M}^1(\mathcal{G})$  sind äquivalent
- a) es gibt ein  $\mu_0 \in \mathbb{M}^1(\mathcal{G})$  mit  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$
- b) es gibt ein  $T \in L(C^0(\mathcal{G}))$  mit  $\|T\| = 1$   
und  $\|T_{\mu_n} f - T f\| \rightarrow 0 \quad \forall f \in C^0(\mathcal{G})$
- iv)  $\mu \in \mathbb{M}^1(\mathcal{G}) ; U \in \text{Rep}(\mathcal{G}), u, v \in H(U) :$   
 $\langle U_\mu(U) u, v \rangle = T_\mu(\langle U u, v \rangle)$

Sei also  $\mathcal{G}$  eine Lie-Gruppe der Dimension  $M$ .  $D_1, \dots, D_M$  eine Basis der zugehörigen Lie-Algebra.  $G_0$  eine kompakte, kanonische Umgebung des neutralen Elementes  $e \in \mathcal{G}$  mit einem kanonischen Koordinatensystem  $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ ,  $f_i$  schiefssymmetrisch, also  $(D_i f_g)(e) = \delta_{ig}$ , und einer Hunt-Funktion  $\chi = \chi_0$  aus dem Abschluß von  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$  mit

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^M f_i^2(x) \quad \forall x \in G_0, \quad 0 < \chi(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathcal{G} \setminus \{e\}$$

$\chi \equiv 1$  für eine kompakte Umgebung von  $e$  ([18], 1.3; [10], 4.2)

Sei  $(\chi_m)_{m \geq 1} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{G})$  mit  $1 \geq \chi_1 \geq \dots \geq \chi_m$ ,

$(G_{mm})$  offene und  $(V_{mm})$  kompakte Umgebungen von  $e$  mit  $G_0 \supset V_m \supset G_m$

$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots \supseteq V_m \rightarrow \{e\}$  und  $1_{G_m} \leq \chi_m \leq 1_{V_m}$ .

Dann gilt für  $f \in \tilde{C}_2^0(\mathbb{G})$ :

$$\begin{aligned} f(xy) - f(x) &= \sum_{i=1}^M (\tilde{D}_i f)(x) f_i(y) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M (\tilde{D}_i \tilde{D}_l f)(x) f_i(y) f_l(y) \chi_m(y) + \\ &+ (f(xy) - f(x) - \sum_{i=1}^M (\tilde{D}_i f)(x) f_i(y) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M (\tilde{D}_i \tilde{D}_l f)(x) f_i(y) f_l(y) \chi_m(y)) \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen, die man für den Grenzwertsatz macht,

sehen ebenso aus wie im  $\mathbb{R}^M$ . Sei  $(\mu_{n,j})_{n,j} \leq \mathbb{M}^1(\mathbb{G})$ .  $K_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}_0$  cadlag, monoton wachsend,  $K_n(0) = 0$ .

$D_1$  dicht in  $\mathbb{R}_+$ ,  $0 \in D_1$ .

#### Voraussetzung 1

(i) Für jede Umgebung  $G$  von  $e$ ,  $t \in D_1$  gilt:

$$\max \{ \mu_{n,j}(\mathbb{G} \setminus G) \mid j \leq k_n(t) \} \rightarrow 0$$

(ii)  $\mu_0$  ist ein Maß auf  $(\mathbb{G} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{G} \times \mathbb{R}_+})$ , so

daß  $t \mapsto \int \chi(x) \mu_0(dx \times [0, t])$  stetig ist; für

$$\mu_n(G \times [0, t]) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} \mu_{n,j}(G) \text{ und für jedes}$$

$f \in C^b(\mathbb{G})$ , das in einer Umgebung von  $e$  verschwindet gelte

$$\int_{\mathbb{G}} f(x) \mu_n(dx \times [0, t]) \rightarrow \int_{\mathbb{G}} f(x) \mu_0(dx \times [0, t]) \quad \forall t \in D_1$$

(iii) Für  $i, l \leq M$  gibt es  $b_0(i, l): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und

$$\text{für } b_n(i, l)(t) := \sum_{i=1}^{k_n(t)} \int f_i(y) f_l(y) \mu_{n,j}(dy)$$

gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(i, l)(t) = b_0(i, l)(t) + \int f_i(y) f_l(y) \mu_0(dy \times (0, t))$   
für alle  $i, l \leq M$ ,  $t \in D_1$

(iv) Für  $i=1, \dots, M$  gibt es

$a_0(i) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so daß für  $T > 0$ ,

$$a_n(i)(t) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} \int f_i(y) \mu_{n,j}(dy) \quad \text{gilt:}$$

$$\sup \{ |a_0(i)(t) - a_n(i)(t)| \mid t \leq T \} \rightarrow 0, \quad i=1, \dots, M$$

(v) Für  $i=1, \dots, M, T > 0$  gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int f_i(y) \mu_{n,j}(dy) \right| = 0$$

## 2. Folgerung

- a) Ist  $G$  eine offene Umgebung von  $e$ , so ist  $\chi$  auf  $G \setminus G$  von 0 weg beschränkt
- b) Ist Voraussetzung 1 (ii) erfüllt, so ist die Konvergenz dort sogar gleichmäßig auf Kompakta.
- c) Ist (ii) und (iii) erfüllt, so ist die Konvergenz in (iii) gleichmäßig auf Kompakta

## Beweis

- a) Da  $\chi$  außerhalb einer kompakten  $e$ -Umgebung  $G_1$  identisch 1 ist, muß also  $\chi$  auf  $G_1 \setminus G$  von 0 weg beschränkt sein. Da  $G_1 \setminus G$  kompakt ist, wäre dies nur dann nicht der Fall, wenn  $\chi$  eine Nullstelle in  $G_1 \setminus G$  hat. Dies ist aber nach Voraussetzung ausgeschlossen.
- b) Ist  $f \geq 0$ , dann ist  $\int f(x) \mu_n(dx \times [0, t])$  eine Folge monoton wachsender Funktionen, die auf einer dichten Teilmenge von  $\mathbb{R}_+$  gegen eine stetige Funktion konvergiert, dann folgt die Behauptung z.B. mit [3], Lemma 8.13. Da  $f \equiv f_+ - f_-$  ist, gilt damit auch hier die Behauptung.

$$c) \quad b_n(i,1)(t) = -\frac{1}{2} b_n(i,i)(t) - \frac{1}{2} b_n(1,1)(t) + \\ + \frac{1}{2} \int (f_i(x) + f_1(x))^2 \nu_n(dx \times (0,t))$$

Für  $\mu \in \mathbb{M}_+^b(\mathcal{G})$  definiert man die Charakteristik

$$(4.13) \quad q(\mu) := \sum_{i=1}^M \left| \int f_i(y) \mu(dy) \right| + \int \chi(y) \mu(dy)$$

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $R$  entspricht dies dem Betrag des ( "differenzierbar abgeschnittenen" ) Erwartungswertes plus Varianz, also den Größen, die in Kap. I, Voraussetzung 1 eingehen.

Aus Voraussetzung 1 (iii) und (V) folgt mit Satz A.8

$$(4.14) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ t, s \leq T}} \sup_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} q(\nu_{n,j}) = 0 \quad \forall T > 0$$

$$V_q(s,t) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} q(\nu_{n,j}) \text{ ist stetig}$$

Setzt man also

$$q_n(s,t) := \sup_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} q(\nu_{n,j}) \quad , \text{ so gilt nach Satz A. 8}$$

Zu jeder Teilfolge  $(n') \leq (n)$  gibt es eine Teilfolge

$$(4.15a) \quad (n'') \leq (n') \text{ und eine stetige, monoton wachsende Funktion } V_q$$

$$\text{mit } \lim_{n''} \sup_{t \leq T} |q_{n''}(0,t) - V_q(t)| = 0 \quad \forall T > 0$$

Daraus ergibt sich dann für  $s_0 \leq \dots \leq s_r$  :

$$(4.15b) \quad \sum_{j=0}^{r-1} \overline{\lim}_{n''} q_{n''}(s_j, s_{j+1}) \leq V_q(s_r) - V_q(s_0)$$

Benötigt werden auch noch die Ungleichungen [18], Lemma 1.6:

Es gibt ein  $b > 0$ , so daß für alle  $\mu \in \mathbb{M}^1(\mathcal{G})$  gilt

$$(A) \quad \left| \int f(y) \mu(dy) - f(e) \right| \leq b \left\| f \right\|_2 q(\mu) \quad \forall f \in C_2^0(G)$$

$$(B) \quad \left\| T_\mu f - f \right\| \leq b \left\| f \right\|_2 q(\mu) \quad \forall f \in \tilde{C}_2^0(G)$$

$$(C) \quad \left\| T_\mu f - f \right\|_2 \leq b \left\| f \right\|_{2/2} q(\mu) \quad \forall f \in C_{2/2}$$

Zur Bezeichnungsweise:

$$v_n(s, t) := \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n,j}, \quad v_n(s, r) \wedge v_n(r, t) = v_n(s, t)$$

$$(4.16) \quad \eta_n(s, t) := \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (\mu_{n,j} - \delta_e), \quad \eta_n(s, r) + \eta_n(r, t) = \eta_n(s, t)$$

$$T_n(s, t) := T_{v_n}(s, t), \quad T_n(s, r) \cdot T_n(r, t) = T_n(s, t)$$

$$\mu_n(s, t) := \mu_n(\cdot \times ]s, t]), \quad \mu_n(s, r) + \mu_n(r, t) = \mu_n(s, t)$$

### 3. Lemma

$(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C_{2,2}(G)$ , es ist

$$\left| \int f(y) v_n(s, t)(dy) - f(e) - \int f(y) \eta_n(s, t)(dy) \right| \leq$$

$$\leq b^2 \left\| f \right\|_{2,2} \left( \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} q(\mu_{n,j}) \right)^2$$

es gibt ein  $C > \infty$  mit

$$q(v_n(s, t)) \leq C \left( \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} q(\mu_{n,j}) + 1 \right) \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} q(\mu_{n,j})$$

### Beweis

Man zeigt etwas allgemeiner:

$$(4.17) \quad \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{M}^1(G), \quad T_j := T_{\mu_j}, \quad \text{es ist}$$

$$\left| \int f(y) \sum_{i=1}^r \mu_i(dy) - f(e) - \int f(y) \sum_{i=1}^r (\mu_i - \delta_e)(dy) \right| \leq$$

$$\leq b^2 \left\| f \right\|_{2,2} \left( \sum_{i=1}^r q(\mu_i) \right)^2$$

$$q\left(\sum_{i=1}^r \mu_i\right) \leq C \left( \sum_{i=1}^r q(\mu_i) + 1 \right) \cdot \sum_{i=1}^r q(\mu_i)$$

Es gilt (siehe [18], 1.2) für  $\mu \in \mathbb{M}^1(\mathbb{G})$ :

$$(4.18) \quad \|T_\mu f\|_2 \leq \|f\|_2 \quad \forall f \in C_2^0(\mathbb{G})$$

Damit und mit (C) von oben folgt für  $f \in C_{2,2}$

$$\begin{aligned} \|T_j \dots T_r f - f\|_2 &= \left\| \left( \prod_{i=j}^r T_i - I \right) f \right\|_2 = \\ &= \left\| \sum_{i=j}^r \prod_{l=j}^{i-1} T_l (T_i - I) f \right\|_2 \leq \sum_{i=j}^r \prod_{l=j}^{i-1} \|T_l (T_i - I) f\|_2 \leq \\ &\leq \sum_{i=j}^r \| (T_i - I) f \|_2 \leq \sum_{i=j}^r b \|f\|_{2,2} q(\mu_i) \\ &= \left\| \int f(y) \prod_{i=1}^r \mu_i(dy) - f(e) - \int f(y) \sum_{i=1}^r (\mu_i - \delta_e)(dy) \right\| \\ &= \left\| \prod_{i=1}^r T_i f(e) - f(e) - \sum_{i=1}^r (T_i f(e) - f(e)) \right\| = \\ &= \left\| \left( \prod_{i=1}^r T_i - I - \sum_{i=1}^r (T_i - I) \right) f(e) \right\| = \\ &< \left\| \sum_{i=1}^r (T_i - I) \left( \prod_{j=i+1}^r T_j - I \right) f(e) \right\| \\ &= \sum_{i=1}^r \left\| (T_i - I) \left( \prod_{j=i+1}^r T_j - I \right) f(e) \right\| \leq \quad (A) \\ &\leq \sum_{i=1}^r b q(\mu_i) \left\| \prod_{j=i+1}^r T_j f - f \right\|_2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^r b q(\mu_i) \sum_{j=i+1}^r b \|f\|_{2,2} q(\mu_j) \leq \\ &\leq b^2 \|f\|_2 \left( \sum_{i=1}^r q(\mu_i) \right)^2, \text{ also der erste Teil von (4.17)} \end{aligned}$$

Aus (B) folgt:

$$\left\| \sum_{i=1}^r \int f(y) (\mu_i - \delta_e)(dy) \right\| \leq b \|f\|_2 \sum_{i=1}^r q(\mu_i)$$

Mit dem eben Bewiesenen folgt:

$$\left\| \int f(y) \prod_{i=1}^r \mu_i(dy) - f(e) \right\| \leq$$

$$\leq b^2 \left\| f \right\|_{2,2}^2 \left( \sum_{i=1}^r q(\mu_i) \right)^2 + b \left\| f \right\|_2 \sum_{i=1}^r q(\mu_i)$$

Setzt man nun der Reihe nach für  $f$  die Funktionen  $f_1, \dots, f_M$ ,  $1_G - \chi$  ein so folgt dann durch Summation die zweite Behauptung in (4.17).

#### 4. Lemma

Ist Voraussetzung 1 erfüllt, dann ist

$$\{ v_n(s, t) \mid 0 \leq s \leq t \in T, n \in \mathbb{N} \} \text{ straff } \forall T > 0$$

#### Beweis

Sei  $T > 0$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

Sei  $s = s_0 < \dots < s_r = t$  eine Zerlegung von  $(s, t)$ . Nach

Lemma 2.3 gilt für  $f \in C_{2,2}$

$$\begin{aligned} & \int f(y) v_n(s_{i-1}, s_i)(dy) - f(e) \leq \\ & \leq \int f(y) v_n(s_{i-1}, s_i)(dy) + b^2 \left\| f \right\|_{2,2}^2 (q_n(s_i) - q_n(s_{i-1}))^2 = \\ & = \int (f - f(e))(y) v_n(s_{i-1}, s_i)(dy) + b^2 \left\| f \right\|_{2,2}^2 (q_n(s_i) - q_n(s_{i-1}))^2, \\ & \text{da } \int f(y) (\mu_{n,j} - \delta_e)(dy) = \int f(y) \mu_{n,j}(dy) - f(e) = \\ & = \int (f(y) - f(e)) \mu_{n,j}(dy) \text{ ist.} \end{aligned}$$

Ist nun  $K_\epsilon \subseteq G$  kompakt, dann gibt es ein kompaktes  $K \subseteq G$  und ein  $g \in C_{2,2}(G)$  mit  $1_{K_\epsilon} \leq g \leq 1_K$  (Wobei  $0 \leq e \in K_\epsilon$ , sonst nimmt man

noch eine kompakte Umgebung von  $e$  hinzu). Damit ist  $g(e) = 1$ , man setzt  $f := -g$ , dann ist wegen  $f(e) = -g(e) = -1$ :

$$1_{G \setminus K} \leq f - f(e) \leq 1_{G \setminus K_\epsilon}.$$

$$\sum_{i=1}^r v_n(s_{i-1}, s_i)(G \setminus K^r) \leq \sum_{i=1}^r v_n(s_{i-1}, s_i)(G \setminus K) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^r \int (f - f(e))(y) v_n(s_{i-1}, s_i)(dy) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^r \left( \int (f - f(e))(y) \mu_n(s_{i-1}, s_i)(dy) + b^2 \left\| f \right\|_{2,2}^2 (q_n(s_i) - q_n(s_{i-1}))^2 \right)$$



$$\leq \int_{i=1}^r \mu_n(s_{i-1}, s_i) (G \setminus K_\varepsilon) + b^2 \|f\|_{2,2} \sum_{i=1}^r (q_n(s_i) - q_n(s_{i-1}))^2$$

$$\leq \mu_n(0, T) (G \setminus K_\varepsilon) + b^2 \|f\|_{2,2} q_n(T) \max_{i=1}^r (q_n(s_i) - q_n(s_{i-1}))$$

Sei also  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben.

Voraussetzung 1 (ii)  $\Rightarrow$  es gibt ein  $K_\varepsilon$  kompakt, so daß

$$\mu_n(0, T) (G \setminus K_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq 1.$$

Zu  $K_\varepsilon$  wählt man nun  $f$  und  $K$  wie oben gefordert, dann gibt es ein

$$c', \text{ so daß } b^2 \|f\|_{2,2} q_n(T) \leq c' \quad \forall n.$$

Nach (4.14) gibt es ein  $\delta$  und ein  $n_0$ , so daß

$$\sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ t, s \in T}} (q_n(t) - q_n(s)) \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot c'} \quad \forall n \geq n_0$$

Zu jedem  $s \leq t \leq T$  gibt es eine Zerlegung  $s = s_0 < \dots < s_r = t$  mit

$$\max_i (s_i - s_{i-1}) \leq \delta, \text{ damit ist dann } \mu_n(s, t) (G \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon, \text{ d.h. also:}$$

$$\mu_n(s, t) (G \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Die Menge  $\{ \mu_n(s) \mid 0 \leq s \leq T, n \leq n_0 \}$  ist endlich, also auch die

$$\text{Menge } \{ \mu_n(s, t) = \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n,j} \mid 0 \leq s \leq t \leq T, n \leq n_0 \}$$

Damit ist das Lemma bewiesen, da in einem lokalkompakten Raum jedes

Wahrscheinlichkeitsmaß straff ist ([10], Theorem 1.1.11).

Nach Lemma 2.4 ist damit  $(\mu_n(s, t))_n$  für jedes  $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$  relativ kompakt. Das nächste Lemma zeigt sogar, daß es eine Teilfolge gibt, die auf  $\mathbb{R}_+^2$  konvergiert.

##### 5. Lemma

Es gibt eine stetige Hemigruppe  $\{ \mu(s, t) \mid 0 \leq s \leq t \} \subseteq \mathbb{M}^1(G)$

mit  $\mu_{n'}(s, t) \xrightarrow{w} \mu(s, t) \quad \forall s \leq t$  für eine Teilfolge  $(n') \leq (n)$ ,

falls Voraussetzung 1 gilt.

# Beweis

Zunächst läßt sich wegen Lemma 2.4 eine Teilfolge (Diagonalfolge)

$(n') \subset (n)$  auswählen mit:

zu jedem  $s \leq t$ ,  $s, t \in D_1$  gibt es ein  $v(s, t) \in \mathbb{M}^1(\mathcal{G})$  und

$v_{n'}(s, t) \xrightarrow{w} v(s, t)$ . Eingedenk der Tatsache, daß man sich auf einer

Teilfolge befindet, schreibt man im Folgenden  $(n)$  statt  $(n')$ .

Bezeichnet man  $T(s, t)$  die zu  $v(s, t)$  gehörenden Wahrscheinlichkeitsoperatoren, so gilt nach (4.11) (iii) :

$$T_n(s, t) f \rightarrow T(s, t) f \quad \forall f \in C^0(\mathcal{G}), s, t \in D_1$$

Setzt man  $c' := b \cdot c \cdot \sup q_n(0, T)$ , so gilt nach (B) und Lemma 2.3

für  $f \in C_2^0(\mathcal{G})$

$$\begin{aligned} (+) \quad & \| (T_n(s, t) - I) f \| \leq b \left\| f \right\|_2 q \left( \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n,j} \right) \leq \\ & \leq c' \left\| f \right\|_2 q_n(s, t) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (++) \quad & \| T_n(s, t) - I \| := \sup \{ \| (T_n(s, t) - I) f \| \mid \left\| f \right\|_2 \leq 1 \} \leq \\ & \leq c' q_n(s, t) \end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.4 gibt es zu jedem  $(s, t) \in \mathbb{R}_2^2$  eine Teilfolge

$(n') = (n'(s, t))$  und ein  $v(s, t) \in \mathbb{M}^1(\mathcal{G})$ , so daß  $v_{n'}(s, t) \xrightarrow{w} v(s, t)$

Für  $f \in C_2(\mathcal{G})$  gilt nach (A):

$$\begin{aligned} (++) \quad & \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int f d(\mu_{n,j} - \delta_e) \right| = \\ & \sum_{j=k_n(f)+1}^{k_n(f)} \left| (T_{\mu_{n,j}} f - f)(e) \right| \leq b \left\| f \right\|_2 \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} q(\mu_{n,j}) \end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere

$$(4.28) \quad \left| \int f \, d\eta_n(s,t) \right| \leq b \left\| f \right\|_2 q_n(s,t) \quad \forall f \in C_2^0(\mathbb{G}), s \leq t$$

Daraus folgt mit Lemma 2.3 für  $f \in C_{2,2}$ ,  $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$

$$(4.29) \quad \left| \int f \, d\nu_n(s,t) - f(e) \right| \leq \\ \leq (b^2 \left\| f \right\|_{2,2} + b \left\| f \right\|_2) (q_n(s,t) + 1) q_n(s,t)$$

Setzt man sukzessive  $f = f_2, \dots, f_M, \frac{1}{\epsilon} - \chi$ , so ergibt sich für ein  $c'$ :

$$(4.30) \quad q(\nu_n(s,t)) \leq c' (q_n(s,t) + 1) q_n(s,t)$$

Ist nun  $\nu(s,t)$  Häufungspunkt von  $\{\nu_n(s,t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,

so gilt dann

$$(4.31) \quad q(\nu(s,t)) \leq c' \left( \overline{\lim}_n q_n(s,t) + 1 \right) \overline{\lim}_n q_n(s,t)$$

Für  $t_j, s_j \in D_1$ ,  $s_j \uparrow s$ ,  $t_j \downarrow t$  gilt für  $f \in C_{2,2}$ :

$$\begin{aligned} & \left| T(s_j, t_j) f(e) - T(s, t) f(e) \right| \leq \\ & \leq \left| T(s, t) (T(t, t_j) - I) f(e) \right| + \\ & + \left| (T(s_j, s) - I) T(s, t_j) f(e) \right| \stackrel{(A)}{\leq} \\ & \leq \left\| (T(t, t) - I) f \right\| + b \left\| T(s, t_j) f \right\|_2 q(\nu(s_j, s)) \stackrel{(B)(C)}{\leq} \\ & \leq b \left\| f \right\|_2 q(\nu(t, t_j)) + (b^2 \left\| f \right\|_{2,2} q(\nu(t, t_j)) + \left\| f \right\|_2) \cdot \\ & \quad \cdot q(\nu(s_j, s)) \end{aligned}$$

Aus (4.31) und (4.14) folgt damit

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_j \left| T(s_j, t_j) f(e) - T(s, t) f(e) \right| = \\ &= \lim_j \left| \int f \, d\nu(s_j, t_j) - \int f \, d\nu(s, t) \right| \quad \forall f \in C_{2,2} \end{aligned}$$

Da  $C_{2,2}$  dicht ist in  $C^0(\mathbb{G})$  folgt daraus:

$$\nu(s, t) = \lim_n \nu_n(s, t)$$

(genauer:  $\nu(s, t) = \lim_j \lim_n \nu_n(s_j, t_j)$ , da aber  $\nu(s, t)$

unabhängig von  $(s_j, t_j)_j$  ist, folgt daraus die Konvergenz).

Also gilt insgesamt:  $\nu(s, t) = \lim_n \nu_n(s, t) \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2$

Damit ist  $\{ v(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$  eine Hemigruppe in  $\mathbb{M}^1$  (6) mit (4.31).

Die Stetigkeit zeigt man wie eben mit (4.31) und (4.14) :

$$\begin{aligned} s_j \rightarrow s, t_j \rightarrow t \Rightarrow 0 &= \lim_j |T(s_j, t_j) f(e) - T(s, t) f(e)| \\ &= \lim_j | \int f d v(s_j, t_j) - \int f d v(s, t) | \end{aligned}$$

Nachdem Lemma 2.5 bewiesen ist, muß zum Nachweis der Konvergenz nur noch gezeigt werden, daß die resultierende Hemigruppe

$\{ v(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$  eindeutig ist. Dies wird sich aus der Tatsache ergeben, daß die zugehörige Hemigruppe  $\{ T(s,t) := T_{v(s,t)} \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$  von Wahrscheinlichkeitsoperatoren die eindeutige Lösung einer Integralgleichung ist.

Dazu schreibt man

$$\begin{aligned} K_{n,n}(t) &= \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (T_{n,n,j} - I) T_{n,n,j} \\ (4.32) \quad &= \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (T_{n,n,j} - I) T_n(\tau_{n,j}, t) \end{aligned}$$

mit  $\tau_{n,j} := k_n^{-1}(\{j\})$ .

Für  $f \in C_2^0$  (6) hat man die Darstellung

$$\begin{aligned} f(y) &= f(e) + \sum_{i=1}^M (D_i f)(e) f_i(y) + \\ (4.33) \quad &+ \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M (D_i D_l f)(e) f_i(y) f_l(y) \chi_m(y) \\ &+ f(y) - f(e) - \sum_{i=1}^M (D_i f)(e) f_i(y) (1 - \chi_m(y)) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M ((D_i D_l f)(\xi(y)) - (D_i D_l f)(e)) f_i(y) f_l(y) \chi_m(y) \end{aligned}$$

wobei man benutzt, daß auf

$G_0$  die Darstellung

$$f(y) = f(e) + \sum_{j=1}^M (D_j f)(e) f_j(y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M (D_i D_j f)(\xi(y)) f_i(y) f_j(y) \text{ gilt}$$

Aus (4.32) und (4.33) folgt

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} T_{n,j} - I \right) f(e) = \\ & = \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (T_{n,j} - I) T_n(\tau_{n,j}, t) f(e) = \\ & = \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int (T_n(\tau_{n,j}, t) f(y) - T_n(\tau_{n,j}, t) f(e)) \mu_{n,j}(dy) \\ & = \sum_{i=1}^M \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} T_n(\tau_{n,j}, t) D_i f(e) \int f_i(y) \mu_{n,j}(dy) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} T_n(\tau_{n,j}, t) D_i D_l f(e) \int f_i(y) f_l(y) \chi_m(y) \mu_{n,j}(dy) \\ & + \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int (T_n(\tau_{n,j}, t) f(y) - T_n(\tau_{n,j}, t) f(e) - \\ & - T_n(\tau_{n,j}, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y)) (1 - \chi_m(y)) \mu_{n,j}(dy) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \sum_{i,l=1}^M \int (T_n(\tau_{n,j}, t) D_i D_l f(\xi(y)) - \\ & - T_n(\tau_{n,j}, t) D_i D_l f(e)) f_i(y) f_l(y) \chi_m(y) \mu_{n,j}(dy) \\ & = \sum_{i=1}^M \int_{[s,t]} T_n(\tau, t) D_i f(e) a_n(i)(d\tau) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{[s,t]} T_n(\tau, t) D_i D_l f(e) b_{n,m}(i,l)(d\tau) + \\ & + \int_{[s,t]} \int (T_n(\tau, t) f(y) - T_n(\tau, t) f(e) - T_n(\tau, t) \sum_{j=1}^M D_j f(e) f_j(y)) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot (1 - \chi_m(y)) \mu_n(dy \times d\tau) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} \int_{[s,t]} \frac{1}{\chi(y)} (T_n(\tau, t) D_i D_1 f(\xi(y)) - T_n(\tau, t) D_i D_1 f(e)) \cdot \\
 & \cdot f_i(y) \cdot f_1(y) \chi_m(y) \chi(y) \mu_n(dy \times d\tau)
 \end{aligned}$$

$$\text{wo } b_{n,m}(i, e)(t) := \sum_{j=1}^k(t) \int f_i(y) f_e(y) \chi_m(y) \mu_{n,j}(dy)$$

Man zeigt nun: ist Voraussetzung 1 erfüllt und  $\{T(s, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$  eine nach Lemma 2.5 existierende konvergente Folge mit Grenzwert  $\{T(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$ , so gilt für  $f \in \mathcal{D}(G)$

$$\begin{aligned}
 (4.35a) \quad \lim_n \int_{s,t} T_n(\tau, t) D_i f(e) a_n(i)(d\tau) &= \\
 &= \int_{[s,t]} T(\tau, t) D_i f(e) a_0(i)(d\tau) \quad \forall i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.35b) \quad \lim_n \int_{[s,t]} T_n(\tau, t) D_i D_1 f(e) b_{n,m}(i, 1)(d\tau) &= \\
 &= \int_{[s,t]} T(\tau, t) D_i D_1 f(e) b_{0,m}(i, 1)(d\tau) \quad \forall i, 1, m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.35c) \quad \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{[s,t]} (T_n(\tau, t) f(y) - T_n(\tau, t) f(e)) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y) \cdot \\
 \cdot (1 - \chi_m(y)) \mu_n(dy \times d\tau) &= \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{[s,t]} (T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - T(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y)) \cdot \\
 &\cdot (1 - \chi_m(y)) \mu_0(dy \times d\tau) \quad \forall m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.35d) \quad \lim_m \lim_n \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{[s,t]} \frac{1}{\chi(y)} (T_n(\tau, t) D_i D_1 f(\xi(y)) - \right. \\
 \left. - T_n(\tau, t) D_i D_1 f(e)) f_i(e) f_1(y) \chi_m(y) \chi(y) \mu_n(dy \times d\tau) \right| &= 0 \quad \forall i, 1, m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.35e) \quad \lim_m \int_{\mathbb{R}^n} \int_{[s,t]} (T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - \\
 - T(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y) \chi_m(y)) \mu_0(dy \times d\tau) &= 0
 \end{aligned}$$

$$(4.35f) \lim_m \int_{\mathbb{R}^d} \int_{[s,t]} T(\tau, t) D_i D_1 f(e) f_i(y) f_1(y) \chi_m(y) \nu_0(dy \times d\tau) = 0$$

zu (4.35a) :

$$\begin{aligned} & \int_{[s,t]} T_n(\tau, t) D_i f(e) a_n(i)(d\tau) - \int_{[s,t]} T(\tau, t) D_i f(e) a_0(i)(d\tau) \\ &= \int_{[s,t]} (T_n(\tau, t) D_i f(e) - T(\tau, t) D_i f(e)) a_n(i)(d\tau) + \\ &+ \int_{[s,t]} T(\tau, t) D_i f(e) (a_n(i)(d\tau) - a_0(i)(d\tau)) \end{aligned}$$

Sei  $f \in C_{2,2}(\mathbb{G})$ , dann folgt mit (A), (C), Lemma 2.3 und

$$T_n(s, t) \in C_2^0(\mathbb{G}) \subseteq C_2^0(\mathbb{G})$$

$$\begin{aligned} & |T_n(\tau, t) f(e) - T_n(\tau+\delta, t) f(e)| = \\ &= | (T_n(\tau, \tau+\delta) - I) T_n(\tau+\delta, t) f(e) | \leq \\ &\leq b |T_n(\tau+\delta, t) f|_2 q_n(\tau, \tau+\delta) = \\ &= b (|T_n(\tau+\delta, t) f - f|_2 + |f|_2) q_n(\tau, \tau+\delta) \leq \\ &\leq b_1 (|f|_{2,2} q_n(\tau+\delta, t) + |f|_2) q_n(\tau, \tau+\delta) \end{aligned}$$

Mit (4.14) und Satz A. 8 ergibt sich

$$(4.36) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|\tau - \tau'| \leq \delta \\ \tau, \tau' \leq t}} |T_n(\tau, t) f(e) - T_n(\tau', t) f(e)| = 0 \quad \forall f \in C_{2,2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\tau \leq t} |T_n(\tau, t) f(e) - T(\tau, t) f(e)| = 0$$

Für  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$  ist  $D_1 f \in C_{2,2}$ , also

$$\begin{aligned} & | \int_{[s,t]} (T_n(\tau, t) D_1 f(e) - T(\tau, t) D_1 f(e)) a_n(i)(d\tau) | \leq \\ &\leq \sup_{\tau \leq t} |T_n(\tau, t) D_1 f(e) - T(\tau, t) D_1 f(e)| \cdot q_n(s, t) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Man zeigt nun, daß  $q(v(s, t))$  von beschränkter Variation ist. Es

gibt eine Folge  $(n') \stackrel{C}{\subseteq} (n)$  mit  $v_{n'}(s, t) \rightarrow v(s, t) \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2$

Aus (4.15) folgt: es gibt eine stetige, monotone Funktion  $v_q$  mit

$$\sum_{i=0}^{r-1} \lim_{n''} q_{n''}(s_i, s_{i+1}) \leq v_q(t) \quad \text{für alle } s_0 \leq \dots \leq s_r \leq t.$$

Nach (4.29) gilt für  $f = f_1, \dots, f_M, 1 - \chi$ :

$$| \int f d v_n (s, t) | \leq c_1 (q_n (s, t) + 1) q_n (s, t), \text{ also}$$

$$| \int f d v (s, t) | = | \lim_{n'} \int f d v_{n'} (s, t) | =$$

$$= | \lim_{n''} \int f d v_{n''} (s, t) | \leq \lim_{n''} | \int f d v_{n''} (s, t) |$$

$$\leq \lim_{n''} c_1 (q_{n''} (s, t) + 1) q_{n''} (s, t) \text{ somit ist}$$

$$\sum_{i=0}^r q (v (s_i, s_{i+1})) \leq v_q (s_r) - v_q (s_0), \text{ also ist gezeigt}$$

(4.37) Ist  $\{ v (s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$  ein Häufungspunkt  
 von  $\{ v_n (s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$ , so gibt es eine stetige,  
 monoton wachsende Funktion  $v_q$  mit  
 $\sup_{i=0}^{r-1} \{ \sum q(v(s_i, s_{i+1})) \mid s \leq s_0 < \dots < s_r \leq t, r \in \mathbb{N} \} \leq v_q(t) - v_q(s)$

Mit (A), (C) folgt für  $f \in C_{2,2}$  (s.o.):

$$| T(\tau, t) f(e) - T(\tau + \delta, t) f(e) | \leq$$

$$\leq b | T(\tau + \delta, t) f |_2 q(v(\tau, \tau + \delta)) \leq$$

$$\leq b(b+1) (|f|_{2,2} q(v(\tau + \delta, t)) + |f|_2) q(v(\tau, \tau + \delta))$$

Mit (4.37) folgt daraus

$$(4.38) \quad \sup \{ \sum_{i=0}^r | T(s_{i+1}, t) f(e) - T(s_i, t) f(e) | \mid s \leq s_0 < \dots < s_r \leq t, r \in \mathbb{N} \} \\ \leq b_1 (|f|_{2,2} + |f|_2) (v_q(t) - v_q(s)) \quad \forall f \in C_{2,2}$$

Damit gilt die Formel über die partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{[s,t]} T(\tau, t) f(e) (a_n(i)(d\tau) - a_0(i)(d\tau)) &= \\ &= (a_n(i)(t) - a_0(i)(t)) f(e) - \\ &- T(s, t) f(e) (a_n(i)(s) - a_0(i)(s)) - \\ &- \int_{[s,t]} T(d\tau, t) f(e) (a_n(i)(\tau-) - a_0(i)(\tau-)) \\ &\Rightarrow | \int_{[s,t]} T(\tau, t) f(e) (a_n(i)(d\tau) - a_0(i)(d\tau)) | \leq \end{aligned}$$



$$\leq \sup_{\tau \leq t} |a_n(i)(\tau) - a_0(i)(\tau)| \leq 3 b_1 ( \|f\|_{2,2} + \|f\|_2 ) .$$

$$\cdot \{ v_q(t) - v_q(s) \} + 0$$

nach Voraussetzung 1 (iv).

Für  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$  ist  $D_i f \in C_{2,2}$ , also kann man  $D_i f$  an Stelle von  $f$  einsetzen, damit gilt (4.35a)

zu (4.35b) :

$$\left| \int f_i(y) f_1(y) \mu_{n,j}(dy) \right| \leq \int f_i^2(y) \mu_{n,j}(dy) + \int f_1^2(y) \mu_{n,j}(dy)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k_n(t)} \left| \int f_i(y) f_1(y) \mu_{n,j}(dy) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_n(t)} \int f_i^2(y) \mu_{n,j}(dy) + \sum_{j=1}^{k_n(t)} \int f_1^2(y) \mu_{n,j}(dy) =$$

$$= b_n(i,i)(t) + b_n(1,1)(t)$$

Sei  $b(i,1)(t) := b_0(i,1)(t) + \int f_i(y) f_1(y) \mu_0(dy \times [0,t])$

$b_n(i,i)$  ist monoton wachsend und konvergiert punktweise (auf einer dichten Menge) gegen die stetige Funktion  $b(i,i)(t)$ , nach Folgerung 2.2 c, sogar gleichmäßig auf Kompakta. Mit Satz A.8 folgt daraus

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_n \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ t,s \in T}} \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int f_i^2(y) \mu_{n,j}(dy) = 0$$

und mit der obigen Ungleichung

$$(4.39) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ t,s \in T}} \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int f_i(y) f_e(y) \mu_{n,j}(dy) \right| = 0$$

Mit (4.39) an Stelle von Voraussetzung 1 (V) beweist man nun (4.35b) ebenso wie (4.35a), wobei man den bisherigen Gedankengang auch für

$\int f_i f_e \chi_m d\mu_{n,j}$  an Stelle von  $\int f_i f_e d\mu_{n,j}$  übernehmen kann,

wegen Folgerung 2.2b) und

$$\int f_i f_1 \chi_m d\mu_{n,j} = \int f_i f_1 d\mu_{n,j} - \int f_i f_1 (1 - \chi_m) d\mu_{n,j}$$

zu (4.35c) :

Man setzt

$$\mu'_n(dy \times d\xi) := \frac{(1 - \chi_m(y)) \mu_n(dy \times d\xi)}{\int \int_{\mathbb{G} \times ]s,t]} (1 - \chi_m(y)) \mu_n(dy \times d\xi)}$$

Dann ist  $\mathbb{G} \times ]s,t]$  ein metrischer Raum mit der Produktmetrik,

$(\mu'_n)_{n \geq 0}$  sind Wahrscheinlichkeitsmaße darauf mit  $\mu'_n \xrightarrow{w} \mu'_0$ .

Die Abbildungen

$$(y, \tau) \mapsto T_n(\tau, t) f(y), (y, \tau) \mapsto T_n(\tau, t) D_i f(e) f_i(y)$$

sind meßbar für alle  $n$  und auch für  $T$  an Stelle von  $T_n$  auf  $\mathbb{G} \times ]s,t]$ :

$$s < t_{m,1} < \dots < t_{m,q_m} = t, \max_j (t_{m,j+1} - t_{m,j}) \rightarrow 0$$

$$T_n(\tau, t) f(y) = \lim_m \sum_j T_n(t_{mj+1}, t) f(y) 1_{]t_{m,j}, t_{m,j+1}]}(\tau)$$

$$\text{Sei also } h_n(y, \tau) := T_n(\tau, t) f(y) - T_n(\tau, t) f(e) -$$

$$- T_n(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y)$$

und  $h(y, \tau)$  wie  $h_n$  mit  $T$  an Stelle von  $T_n$ .

Man zeigt nun:

$$(+) \quad \{ (y, \tau) \in \mathbb{G} \times ]s,t] \mid (y_n, \tau_n) \rightarrow (y, \tau) \Rightarrow h_n(y_n, \tau_n) \rightarrow h(y, \tau) \} = \mathbb{G} \times ]s,t]$$

$$h_n(y_n, \tau_n) - h(y, \tau) = h_n(y_n, \tau_n) - h(y_n, \tau) + h(y_n, \tau) - h(y, \tau)$$

Wegen  $T(s, t) f \in C^0(\mathbb{G})$  folgt sofort  $h(y_n, \tau) - h(y, \tau) \rightarrow 0$ .

$$h_n(y_n, \tau_n) - h(y_n, \tau) = T_n(\tau_n, t) f(y_n) - T(\tau, t) f(y_n) +$$

$$+ T_n(\tau_n, t) f(e) - T(\tau, t) f(e)$$

$$+ \sum_{i=1}^M T_n(\tau_n, t) D_i f(e) f_i(y_n) - T(\tau, t) D_i f(e) f_i(y_n)$$

$$\begin{aligned} & \left| T_n(\tau_n, t) f(e) - T(\tau, t) f(e) \right| \leq \\ & \leq \sup_{\tau_1 \leq t} \left| T_n(\tau_1, t) f(e) - T(\tau_1, t) f(e) \right| + \\ & + \left| T(\tau_n, t) f(e) - T(\tau, t) f(e) \right| + 0 \end{aligned}$$

nach (4.36) und da  $T(s, t) f$  stetig ist.

Damit muß nur noch

$T_n(\tau_n, t) f(y_n) - T(\tau, t) f(y_n) \rightarrow 0$  für (+) gezeigt werden.

$C_{2,2}$  liegt dicht in  $C^0(G)$ , da  $D(G)$  dicht in  $C^0(G)$  ist.

Zu  $g \in C^0(G)$  gibt es also ein  $f \in C_{2,2}$  mit  $\|g - f\| \leq \delta$  bei beliebig vorgegebenen  $\delta > 0$ .

$$\begin{aligned} & \left| T_n(\tau, t)(e) - T(\tau, t)g(e) \right| \leq \\ & \leq \left| T_n(\tau, t)f(e) - T(\tau, t)f(e) \right| + \\ & + \left| T_n(\tau, t)(g - f) \right| + \left| T(\tau, t)(g - f) \right| \leq \\ & \leq \left| T_n(\tau, t)f(e) - T(\tau, t)f(e) \right| + 2\delta, \text{ nach (4.36) gilt dann} \end{aligned}$$

$$\lim_n \sup_{\tau \leq T} \left| T(\tau, t)g(e) - T(\tau, t)f(e) \right| \leq 2\delta, \text{ also}$$

$$(4.40) \quad \lim_n \sup_{\tau \leq T} \left| T(\tau, t)g(e) - T(\tau, t)f(e) \right| = 0 \quad \forall g \in C^0(G)$$

$$\begin{aligned} & T_n(\tau_n, t)f(y_n) - T_n(\tau_n, t)f(y) = \\ & = \int (f(y_n z) - f(yz)) v_n(\tau_n, t)(dz) \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig; es gibt ein Kompaktes  $K$ , so daß

$$v_n(\tau_n, t)(G \setminus K) \leq (2\|f\|)^{-1} \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Sei  $k_1 = k \cup k^{-1}$ ,  $k_1$  ist kompakt und symmetrisch, damit gibt

es zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $U$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $V$ , so daß

$$x^{-1} V x \leq U \quad \forall x \in k_1. \text{ Es gibt ein } n_1 \geq n_0$$

$$\text{mit } y_n^{-1} y \in V \quad \forall n \geq n_1,$$

$$\text{also ist } z^{-1} y_n^{-1} y z \in U \quad \forall z \in k_1, n \geq n_1.$$

Nun ist  $f$  gleichmäßig stetig bzgl. der links-gleichmäßigen Struktur

d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine  $\varepsilon$ -Umgebung

U mit  $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon \quad \forall x^{-1}y \in U$ .

Damit gilt für  $n \geq n_1, z \in k_1$ :

$$|f(y_n z) - f(yz)| \leq \epsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Also ist } & |T_n(\tau_n, t) f(y_n) - T_n(\tau_n, t) f(y)| = \\ & = \left| \int (f(y_n z) - f(yz)) v_n(\tau_n, t) (dz) \right| \leq \\ & \leq 2 \|f\| v_n(GK) + \epsilon \leq 2\epsilon \quad \forall n \geq n_1 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$(++) \quad T_n(\tau_n, t) f(y_n) - T_n(\tau_n, t) f(y) \rightarrow 0$$

Bezeichnet man die Multiplikation von links mit  $L_y$ , also

$$L_y f(x) = f(yx), \text{ so ist } T_\mu L_y = L_y T_\mu \quad \forall y \in G, \mu \in \mathbb{M}^1(G).$$

$$\text{Also ist } T_n(\tau_n, t) f(y) - T(\tau_n, t) f(y) =$$

$$= T_n(\tau_n, t) (L_y f)(e) - T(\tau_n, t) (L_y f)(e)$$

Für  $f \in \mathcal{D}(G)$  ist  $L_y f$  nur noch in  $C^0(G)$ , aber mit (4.40) folgt

$$\begin{aligned} & |T_n(\tau_n, t) (L_y f)(e) - T(\tau_n, t) (L_y f)(e)| \leq \\ & \leq \sup_{\tau \leq t} |T_n(\tau_n, t) (L_y f)(e) - T(\tau, t) (L_y f)(e)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit gilt aber nun die Behauptung (+). Mit [2], Theorem 5.5 folgt

$$\text{daraus } \mu'_n h_n^{-1} \rightarrow \mu'_0 h^{-1}.$$

Da  $\sup_{t,y} |h_n(t,y)| \leq c \|f\|_2$  gilt, ergibt sich daraus

$$\int h_n d\mu'_n \rightarrow \int h d\mu'_0, \text{ also (4.35c) wegen}$$

$$\int \int_{G \times [s,t]} (1 - \chi_m(y)) \mu_n(dy \times d\tau) \rightarrow \int \int_{G \times [s,t]} (1 - \chi_m(y)) \mu_0(dy \times d\tau)$$

zu (4.35 d):

$$\text{Setzt man } g := D_i D_1 f$$

$$h_n(y, \tau) := T_n(\tau_n, t) g(\xi(y)) - T_n(\tau, t) g(e), \text{ so genügt es}$$

wegen  $\left| \frac{1}{\chi(y)} f_i(y) f_1(y) \right| \leq 1$  zu zeigen:

$$(+++)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{G \times [s,t]} |h_n(y, \tau)| \chi_m(y) \chi(y) \mu_n(dy \times d\tau) = 0$$

$$h_n(y, \tau) = \int (g(\xi(y)z) - g(z)) v_n(\tau, t) (dz)$$

Sei  $\varepsilon_1 > 0$  beliebig. Wegen  $\|g\| \leq \|f\|_2$  gibt es eine kompakte Menge  $K$  mit  $v_n(\tau, t)(\mathcal{G}K) \leq (2\|g\|)^{-1} \varepsilon_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tau \leq t$ .

Damit wird

$$|h_n(y, \tau)| \leq \varepsilon_1 + \left| \int_K (g(\xi(y)z) - g(z)) v_n(\tau, t)(dz) \right|$$

für  $n \in \mathbb{N}, \tau \leq t, y \in G_0$ .

Sei  $K_1 := K \cup K^{-1}$ ;  $g \in C^0(\mathcal{G})$ , also gibt es eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U$  mit  $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon_1 \quad \forall x^{-1}y \in U$ ;

zu  $K_1$  und  $U$  gibt es eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $V$  mit  $z^{-1}Vz \leq U \quad \forall z \in K_1$ , also ist  $|g(\xi(y)z) - g(z)| \leq \varepsilon_1 \quad \forall z \in K, \xi(y) \in V$

Damit wird

$$|h_n(y, \tau)| \leq 2\varepsilon_1 + 2\|g\| 1_{\xi(y) \notin V}(y) \quad \forall y \in G_0$$

Da  $\xi$  stetig ist, gibt es eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $V_1 \leq G_0$  mit  $\xi(V_1) \leq V$  (da  $\xi(e) = e \in V$  ist), also gibt es eine weitere  $\varepsilon$ -Umgebung  $V_2$  und eine stetige Funktion  $g_1$  mit

$$1_{V_2} \leq g_1 \leq 1_{V_1}, \text{ für } g_2 := 1 - g_1 \text{ ist dann}$$

$$1_{\xi(y) \notin V} \leq 1 - 1_{V_1} \leq g_2 \leq 1_{V_2}, \text{ damit}$$

ergibt sich nun

$$\int_{\mathcal{G}x]s, t]} |h_n(y, \tau)| \chi_m(y) \chi(y) \mu_n(dy \times d\tau) \leq$$

$$\leq 2\varepsilon_1 \int_{\mathcal{G}} \chi(y) \mu_n(dy \times ]s, t]) +$$

$$+ 2\|g\| \int_{\mathcal{G}} g_2(y) \chi_m(y) \chi(y) \mu_n(dy \times ]s, t])$$

$$\leq 2\varepsilon_1 q_n(s, t) +$$

$$+ 2\|f\|_2 \int_{\mathcal{G}} g_2(y) \chi_m(y) \chi(y) \mu_n(dy \times ]s, t])$$

Nun ist  $g_2$  eine stetige, beschränkte reellwertige Funktion, die auf eine  $\varepsilon$ -Umgebung, nämlich  $V_2$  verschwindet, also gilt nach

Folgerung 2.2 :

$$\lim_n \int_G g_2(y) \chi_m(y) \chi(y) \mu_n(dy \times ]s, t]) = \\ = \int_G g_2(y) \chi_m(y) \chi(y) \mu_0(dy \times ]s, t])$$

Da  $\chi_m(y) g_2(y) \rightarrow 0 \quad \forall y$ , folgt dem Satz über die dominierte Konvergenz (da  $\sup_y |g_2(y) \chi_m(y)| \leq M$  ist und

$$\mu_0(\{G \setminus V_2\} \times ]s, t]) < \infty) :$$

$$\int_G g_2(y) \chi_m(y) \chi(y) \mu_0(dy \times ]s, t]) \rightarrow 0.$$

Für beliebig vorgegebenes  $\epsilon$  setzt man nun  $\epsilon_1 := (2 \sup_n q_n(s, t))^{-1} \epsilon$  und erhält dann:

$$\lim_m \overline{\lim}_n \int \int_{G \times ]s, t]} |h_n(y, \tau)| \chi_m(y) \chi(y) \mu_n(dy \times d\tau) \leq \epsilon$$

und damit (4.35d)

zu (4,35e) :

Man wendet wieder den Satz über die dominierte Konvergenz an:

es gilt für alle  $(y, \tau) \in G \times ]s, t]$ :

$$0 + |T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - T(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f(y)| \chi_m(y) = \\ = \frac{1}{2} \left| \sum_{i, l=1}^M T(\tau, t) D_i D_l f(\xi(y)) f_i(y) f_l(y) \right| \chi_m(y) \\ = \frac{1}{2} \chi(y) \frac{1}{\chi(y)} \left| \sum_{i, l=1}^M D_i D_l T(\tau, t) f(\xi(y)) f_i(y) f_l(y) \right| \chi_m(y) \\ \leq \chi(y) \sum_{i, l=1}^M |D_i D_l T(\tau, t) f| \leq$$

$$\leq \chi(y) |T(\tau, t) f|_2 \leq \chi(y) |f|_2$$

und die rechte Seite ist nach Voraussetzung 1 ii) integrierbar

bzgl.  $\mu_0$ . (Verwendet wurde:  $D_i D_l T_\mu = T_\mu D_i D_l$  auf  $C_2^0(G)$ ,

$T_\mu(C_2^0(G)) \subseteq C_2^0(G)$  mit  $|T_\mu f|_2 \leq |f|_2 \quad \forall \mu \in \mathbb{M}^1(G)$ )

zu (4.35 f) : wie (4.35 e).

Mit der (4.35) vorangegangenen Darstellung ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
 & k_{n,n} (t) \quad (T_{n,n} - I) \quad f(e) - \sum_{i=1}^M \int_{]s,t]} T(\tau, t) D_i f(e) a_o(i) (d\tau) \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{]s,t]} T(\tau, t) D_i D_l f(e) b_o(i, l) (d\tau) - \\
 & - \int_{\mathbb{G}_X]s,t]} (T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - T(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y)) \mu_o(dy \times d\tau) = \\
 & = \sum_{i=1}^M \int_{]s,t]} \{ T_n(\tau, t) D_i f(e) a_n(i) (d\tau) - \int_{]s,t]} T(\tau, t) D_i f(e) a_o(i) (d\tau) \} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{]s,t]} \{ T_n(\tau, t) D_i D_l f(e) b_{n,m}(i, l) (d\tau) - \\
 & \quad - \int_{]s,t]} T(\tau, t) D_i D_l f(e) b_{o,m}(i, l) (d\tau) \} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{\mathbb{G}_X]s,t]} T(\tau, t) D_i D_l f(e) f_i(y) f_l(y) \chi_m(y) \mu_o(dy \times d\tau) \\
 & + \int_{\mathbb{G}_X]s,t]} (T_n(\tau, t) f(y) - T_n(\tau, t) f(e) - T_n(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y)) \cdot \\
 & \quad \cdot (1 - \chi_m(y)) \mu_n(dy \times d\tau) \\
 & - \int_{\mathbb{G}_X]s,t]} (T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - T(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y)) \cdot \\
 & \quad \cdot (1 - \chi_m(y)) \mu_o(dy \times d\tau) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{\mathbb{G}_X]s,t]} \frac{1}{\chi(y)} (T_n(\tau, t) D_i D_l f(\xi(y)) - T_n(\tau, t) D_i D_l f(e)) \cdot \\
 & \quad \cdot f_i(y) f_l(y) \chi_m(y) \chi(y) \mu_n(dy \times d\tau) \\
 & - \int_{\mathbb{G}_X]s,t]} (T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - T(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y)) \cdot \\
 & \quad \cdot \chi_m(y) \mu_o(dy \times d\tau)
 \end{aligned}$$

wobei man (s.o.) definiert hat :

$$b_{n,m}(i,1)(t) := \sum_{j=1}^{k_n(t)} f_i(y) f_1(y) \chi_m(y) \mu_{n,j}(dy)$$

$$b_{0,m}(i,1)(t) := b_0(i,1)(t) + \int f_i(y) f_1(y) \chi_m(y) \mu_0(dy \times 0, t)$$

Da die linke Seite unabhängig ist von  $m$ , so auch die Rechte, man kann also  $m$  beliebig groß wählen, mit (4,35) folgt daraus, daß die Differenz in der Grenze verschwindet, also

$$\begin{aligned} \lim_{n'} (T_{n'}(s,t) - I) f(e) &= \sum_{i=1}^M \int_{[s,t]} T(\tau, t) D_i f(e) a_0(i)(d\tau) + \\ (4.41) \quad &+ \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{[s,t]} T(\tau, t) D_i D_l f(e) b_0(i,1)(d\tau) + \\ &+ \int \int_{G \times [s,t]} (T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - T(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y)) \mu_0(dy \times d\tau) \end{aligned}$$

für jede nach Lemma 2.5 existierende konvergente Teilfolge

$$\{T_{n'}(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}, f \in \mathcal{D}(G).$$

Andererseits ist  $\lim_{n'} T_{n'}(s,t) f = T(s,t) f \quad \forall f \in C_0^O(G)$

$$\text{also } \lim_{n'} (T_{n'}(s,t) - I) f(e) = T(s,t) f(e) - f(e)$$

Dann gilt also, da  $\mathcal{D}(G)$  in  $C_2^O(G)$  dicht ist

## 6. Lemma

Ist Voraussetzung 1 erfüllt und  $\{T_{n'}(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$  eine nach Lemma 2.5 existierende konvergente Teilfolge mit Grenzwert

$\{T(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$ , so gilt die Gleichung ( $f \in C_2^O(G)$ ):

$$\begin{aligned} T(s,t) f(e) - f(e) &= \sum_{i=1}^M \int_{s,t} T(\tau, t) D_i f(e) a_0(i)(d\tau) + \\ (4.42) \quad &+ \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{[s,t]} T(\tau, t) D_i D_l f(e) b_0(i,1)(d\tau) + \\ &+ \int \int_{G \times [s,t]} (T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - T(\tau, t) \sum_{i=1}^M D_i f(e) f_i(y)) \mu_0(dy \times d\tau) \end{aligned}$$



# 7. Bemerkung

Zu dieser "Rückwärts Gleichung" (4.42) gehört natürlich auch eine "Vorwärts Gleichung"

$$\begin{aligned}
 T(s,t) f(e) - f(e) &= \sum_{i=1}^M \int_{J[s,t]} T(s,t) \tilde{D}_i f(e) a_o(i) (d\tau) \\
 (4.43a) \quad &+ \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{J[s,t]} T(s,t) \tilde{D}_i \tilde{D}_l f(e) b_o(i,l) (d\tau) + \\
 &+ \int_{G_x} \int_{J[s,t]} (T(s,\tau) f(y) - T(s,\tau) f(e) - T(s,\tau) \sum_{i=1}^M \tilde{D}_i f_i(y)) \mu_o(dy \times d\tau) \\
 &\quad \forall f \in C_2^o(G)
 \end{aligned}$$

(4.43a) läßt sich auf  $G$  fortsetzen, weil für  $f \in \tilde{C}_2^o(G)$  auch

$L_x f \in \tilde{C}_2^o(G)$  ist und  $T_\mu \tilde{D}_i L_x f = L_x T_\mu \tilde{D}_i f$  ist, also

$$\begin{aligned}
 T(s,t) f(x) - f(x) &= \sum_{i=1}^M \int_{J[s,t]} T(s,\tau) \tilde{D}_i f(x) a_o(i) (d\tau) \\
 (4.43b) \quad &+ \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{J[s,t]} T(s,\tau) \tilde{D}_i \tilde{D}_l f(x) b_o(i,l) (d\tau) + \\
 &+ \int_{G_x} \int_{J[s,t]} (T(s,\tau) f(xy) - T(s,t) f(x) - T(s,\tau) \sum_{i=1}^M \tilde{D}_i f(x) f_i(y)) \mu_o(dy \times d\tau) \\
 &\quad \forall x \in G, f \in \tilde{C}_2^o(G)
 \end{aligned}$$

Der Beweis von (4.43a) verläuft analog zu (4.42), indem man die Ungleichung (B) statt (A) und (C) verwendet, die Taylor-Entwicklung (4.12) statt (4.33) und statt (4.32) die Gleichung:  $T_n(s,t) - I =$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} T_{\mu_{n,j}} - I = \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \sum_{l=k_n(s)+1}^{j-1} T_{\mu_{n,l}} (T_{\mu_{n,j}} - I) = \\
 &= \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} T_n(s, \tau_{nj}^-) (T_{\mu_{n,j}} - I)
 \end{aligned}$$

Wann läßt sich (4.43b) zur entsprechenden starken Gleichung

$$\begin{aligned}
 T(s, \tau) f - f &= \sum_{i=1}^M \int_{[s, \tau]} T(s, \tau) D_i f a_o(i) (d\tau) + \\
 (4.43c) \quad &+ \frac{1}{2} \sum_{i, l=1}^M \int_{[s, \tau]} T(s, \tau) \tilde{D}_i \tilde{D}_l f b_o(i, l) (d\tau) + \\
 &+ \int \int_{G \times [s, \tau]} (T(s, \tau) R_y f - T(s, \tau) f - T(s, \tau) \sum_{i=1}^M \tilde{D}_i f f_i(y) \mu_o(dy \times d\tau) \\
 &\quad \forall f \in \tilde{C}_2^0(G)
 \end{aligned}$$

fortsetzen ?

Es muß  $(y, \tau) \mapsto T(s, \tau) R_y f$  meßbar und Bochner - integrierbar sein, ebenso

$$\tau \mapsto T(s, \tau) f, \tau \mapsto T(s, \tau) \tilde{D}_i f, \tau \mapsto T(s, \tau) \tilde{D}_i \tilde{D}_l f.$$

Dabei folgt die Integrierbarkeit sofort aus der Meßbarkeit und der Beschränktheit.

Wenn  $G$  eine abzählbare Basis für seine Topologie hat ( was bisher nicht gefordert wurde), kann man die Meßbarkeit der obigen Abbildungen zeigen:

Dann ist  $C^0(G)$  separabel und daher genügt es nach Pettis' Theorem, die schwache Meßbarkeit nachzuweisen, d.h.

$$(y, \tau) \mapsto \int T(s, \tau) R_y f(x) \mu(dx), \mu \in \mathbb{M}^b(G)$$

ist meßbar. Die Existenz einer abzählbaren Basis für Topologie liefert, daß die Maße mit endlichen Trägern dicht sind in  $\mathbb{M}^b(G)$ , d.h. es gibt eine Folge  $(\mu'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Maßen mit endlichen Träger und  $\mu'_n \xrightarrow{w} \mu$ , also bleibt zu zeigen:

$$(y, \tau) \mapsto \int T(s, \tau) R_y f(x) \mu'_n(dx) \text{ ist meßbar für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei also  $\mu'_n = \sum_{j=1}^r \delta_{x_{n,j}}$ ; da  $(y, \tau) \mapsto T(s, \tau) f(x_{n,j}, y)$  meßbar ist, ist es auch

$$(y, \tau) \mapsto \sum_{j=1}^r T(s, \tau) f(x_{n,j}, y) = \int T(s, \tau) f(x, y) \mu'_n(dx)$$

und damit die Behauptung bewiesen. Aber schon von der schwächeren Version (4.42) läßt sich zeigen, daß sie höchstens eine Lösung besitzt.

### 8. Lemma

$\mu_0$  ist ein (positives) Maß auf  $(G \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}_G \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$ , so daß

$$\int_G \chi(y) \mu_0(dy \times [0, t]) < \infty.$$

Es gibt  $a_0(i), b_0(i, e) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, e = 1, \dots, M$ , so daß die Matrix  $(b_0(i, e)(t) - b_0(i, e)(s))_{i, e}$  für  $s \leq t$  symmetrisch und positiv-semidefinit ist; dann gibt es höchstens eine stetige Hemigruppe

$\{v(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\} \subseteq \mathbb{M}^1(G)$  deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsoperatoren  $\{T(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$  die Gleichung (4.42) lösen.

Zum Beweis benötigt man ein

### 9. Lemma

$E$  ist ein kompakter Raum,  $T < \infty$ ;  $F : [0, T] \times E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit

$F(0, x) = 0 \ \forall x \in E$ ;  $V : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  monoton wachsend; zu jedem

Punkt  $(s, y) \in [0, T] \times E$  mit  $F(s, y) = \min \{F(s, x) \mid x \in E\}$  gibt es

eine Funktion  $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $\lim_{t \rightarrow s} a(t) = 0$  und für  $0 \leq t \leq t' \leq T$

$$(4.44) \quad F(t', y) - F(t, y) \geq - (a(t) + a(t')) (V(t') - V(t))$$

dann gilt:  $F(t, x) \geq 0 \ \forall (t, x) \in [0, T] \times E$

### Beweis:

Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  setzt man  $F_1(t, x) := F(t, x) + \varepsilon V(t)$ . Man zeigt:

$$(+ \quad F_1(t, x) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times E.$$

Sei angenommen:  $F_1(t, x) < 0$  für ein  $(t, x)$ .

Dann gibt es wegen  $F(0, x) = 0 \ \forall x \in E$  ein  $q < 0$  und ein  $(s, y) \in [0, t] \times E$  mit

$$F_1(s, x) = q \text{ und } F_1(t, x) > F_1(s, y) \quad \forall (t, x) \in [0, s] \times E.$$

$$F_1(s, y) - F_1(s - \delta, y) < 0 \iff$$

$$-a(s - \delta) \cdot (V(s) - V(s - \delta)) \leq F(s, y) - F(s - \delta, y) <$$

$$< -\varepsilon (V(s) - V(s - \delta)) \leq 0, \text{ also ist auch } V(s - \delta) < V(s) \ \forall \delta \in ]0, s].$$

Für  $\delta_0$  hinreichend klein ist,  $0 \leq a(s-\delta) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \delta \leq \delta_0$  also

$$\begin{aligned} F_1(s, y) - F_1(s-\delta, y) &= F(s, y) - F(s-\delta, y) + \epsilon (v(s) - v(s-\delta)) \geq \\ &\geq (\epsilon - a(s-\delta)) \cdot (v(s) - v(s-\delta)) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \epsilon (v(s) - v(s-\delta)) > 0 \quad \forall \delta \in ]0, \delta_0], \end{aligned}$$

d.h.  $F_1(s, y) > F_1(s-\delta, y) \quad \forall \delta \in ]0, \delta_0]$ , dies ist aber ein Widerspruch,

somit gilt (+).  $F(t, x) = F_1(t, x) - \epsilon v(t) \geq -\epsilon v(t) \quad \forall \epsilon > 0$ ,

also  $F(t, x) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times E$ .

### Beweis Lemma 2.8

Sei also angenommen, daß es zwei Hemigruppen  $\{v(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$  und  $\{v'(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$  mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsoperatoren  $T(s, t)$  bzw.  $T'(s, t)$  gibt, die (4.42) lösen.

Für  $r > 0$  setzt man nun  $F(t, x) := T(r-t, r) f(x) - T'(r-t, r) f(x)$  mit  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ ,  $0 \leq t \leq r$ ;

$E := \mathcal{G} \cup \{\infty\}$  die Kompaktifizierung von  $\mathcal{G}$  mit  $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$  und  $f(\infty) = 0 \quad \forall f \in C^0(\mathcal{G})$ .

Man zeigt nun, daß die Voraussetzungen des obigen Lemmas erfüllt sind.

$$F(0, x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x.$$

Sei also  $(s, y)$  ein Punkt mit  $F(s, y) = \min \{F(s, x) \mid x \in E\}$ , damit ist wegen  $L_y T_\mu = T_\mu L_y \quad \forall \mu \in \mathbb{R}_+^1(\mathcal{G})$   $L_y F(s, e) = F(s, y) \leq F(s, yx) = L_y F(s, x) \quad \forall x \in \mathcal{G}$ , also gilt für  $g(x) := L_y F(s, x) - L_y F(s, e)$  wegen  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ :

$$(\text{++}) \quad g \in C_2^0(\mathcal{G}), \quad g(e) = 0, \quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \in E.$$

$$F(t + \delta, y) - F(t, y) =$$

$$= T(r-t-\delta, r) L_y f(e) - T'(r-t-\delta, r) L_y f(e) -$$

$$- (T(r-t, r) L_y f(e) - T'(r-t, r) L_y f(e)) =$$

$$= \sum_{i=1}^M \int_{]r-t-\delta, r-t]} (T(\tau, r) - T'(\tau, r)) D_i L_y f(e) a_0(i) (d\tau) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{[r-t-\delta, r-t]} (T(\tau, r) - T'(\tau, r)) D_i D_l L_Y f(e) b_o(i, l) (d\tau) + \\
 & + \int_{G \times [r-t-\delta, r-t]} \{ (T(\tau, r) - T'(\tau, r)) L_Y f(z) - (T(\tau, r) - T'(\tau, r)) L_Y f(e) - \\
 & \quad - (T(\tau, r) - T'(\tau, r)) \sum_{i=1}^M D_i L_Y f(e) f_i(z) \} \mu_o(dz \times d\tau) = \\
 & = \sum_{i=1}^M \int_{[r-t-\delta, r-t]} (T(\tau, r) - T(s, r)) D_i L_Y f(e) a_o(i) (d\tau) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{[r-t-\delta, r-t]} (T(\tau, r) - T(s, r)) D_i D_l L_Y f(e) b_o(i, l) (d\tau) \\
 & + \int_{G \times [r-t-\delta, r-t]} \{ (T(\tau, r) - T(s, r)) L_Y f(z) - (T(\tau, r) - T(s, r)) L_Y f(e) - \\
 & \quad - (T(\tau, r) - T(s, r)) \sum_{i=1}^M D_i L_Y f(e) f_i(z) \} \mu_o(dz \times d\tau) \\
 & + \sum_{i=1}^M \int_{[r-t-\delta, r-t]} (T'(\tau, r) - T'(s, r)) D_i L_Y f(e) a_o(i) (d\tau) \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{[r-t-\delta, r-t]} (T'(\tau, r) - T'(s, r)) D_i D_l L_Y f(e) b_o(i, l) (d\tau) \\
 & - \int_{G \times [r-t-\delta, r-t]} \{ (T'(\tau, r) - T'(s, r)) L_Y f(z) - (T'(\tau, r) - T'(s, r)) L_Y f(e) - \\
 & \quad - (T'(\tau, r) - T'(s, r)) \sum_{i=1}^M D_i L_Y f(e) f_i(z) \} \mu_o(dz \times d\tau) \\
 & + \sum_{i=1}^M \int_{[r-t-\delta, r-t]} (T(s, r) - T'(s, r)) D_i L_Y f(e) a_o(i) (d\tau) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M \int_{[r-t-\delta, r-t]} (T(s, r) - T'(s, r)) D_i D_l L_Y f(e) b_o(i, l) (d\tau) + \\
 & + \int_{G \times [r-t-\delta, r-t]} \{ (T(\tau, r) - T'(s, r)) L_Y f(z) - (T(s, r) - T'(s, r)) L_Y f(e) - \\
 & \quad - (T(s, r) - T'(s, r)) \sum_{i=1}^M D_i L_Y f(e) f_i(z) \} \mu_o(dz \times d\tau) \\
 & =: \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_9
 \end{aligned}$$

Diese Summe ist nach unten abzuschätzen.

Zu  $\Sigma_7 + \Sigma_8 + \Sigma_9$  :

Die Integranden sind unabhängig von  $\tau$ ,  $T(s, t)$  ist mit  $D_i$  und  $L_y$  vertauschbar, damit wird  $\Sigma_7 + \Sigma_8 + \Sigma_9 =$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^M D_i L_y (T(s, r) - T'(s, r)) f(e) (a_0(i)(r-t) - a_0(i)(r-t-\delta)) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M D_i D_l L_y (T(s, r) - T'(s, r)) f(e) (b_0(i, l)(t-t) - b_0(i, l)(r-t-\delta)) \\
 &+ \int_G (L_y (T(s, r) - T'(s, r)) f(z) - L_y (T(s, r) - T'(s, r)) f(e) - \\
 &- \sum_{i=1}^M D_i L_y (T(s, r) - T'(s, r)) f(e) f_i(z)) \mu_0(dx \times ]r-t-\delta, r-t]) \\
 &= \sum_{i=1}^M (a_0(i)(r-t) - a_0(i)(r-t-\delta)) D_i g(e) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^M (b_0(i, l)(r-t) - b_0(i, l)(r-t-\delta)) D_i D_l g(e) \\
 &+ \int_G (g(z) - g(e) - \sum_{i=1}^M D_i g(e) f_i(z)) \mu_0(dz \times ]r-t-\delta, r-t]) \\
 &=: A(g) \geq 0 \text{ denn für } t > s
 \end{aligned}$$

durch  $A \iff (a_0(t) - a_0(s), b_0(t) - b_0(s), \mu_0(\cdot \times ]s, t])$

wird ein Funktional auf  $C_2^0(G)$  definiert, das erzeugende Funktional einer

Halbgruppe  $(\mu_r)_{r \geq 0} \stackrel{C}{=} \mathbb{M}^1(G)$ , und für  $g \in C_2^0(G)$  mit  $g(e) = 0$  gilt

$$A(g) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int g(z) \mu_t(dz) \geq 0.$$

Zu  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_4$  :

Ist  $\tau \leq s$ , dann ist nach Ungleichung (A)

$$\begin{aligned}
 &| (T(\tau, r) - T(s, r)) D_i L_y f(e) | = \\
 &| (T(\tau, s) - I) T(s, r) D_i L_y f(e) | \leq \\
 &\leq b | T(s, r) D_i L_y f |_2 q(v(\tau, s)) \\
 &\leq b | D_i L_y f |_2 q(v(\tau, s))
 \end{aligned}$$

Ist  $\tau > s$ , so lautet die rechte Seite der Ungleichung

$b \mid D_i L_y f \mid_2 q(v(s, \tau))$ . Diese Ungleichungen gelten auch mit  $T'$  an Stelle von  $T$  und  $v'$  an Stelle von  $v$ . Definiert man nun

$$w(t) := \begin{cases} \sup \{ q(v(\tau, s)) \mid \tau \in [t, s] \} & , t \leq s \\ \sup \{ q(v(s, \tau)) \mid \tau \in [s, t] \} & , t \leq s \end{cases}$$

$w'$  wie  $w$  mit  $v'$  statt  $v$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mid \Sigma_1 \mid + \mid \Sigma_4 \mid &\leq 2 b (w(t) + w(t-\delta) + w'(t) + w'(t-\delta)) \cdot \\ &\cdot \sum_{i=1}^M \mid D_i L_y f \mid_2 \int_{[r-t-\delta, r-t]} \mid a_0(i) \mid (d\tau) \end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mid \Sigma_2 \mid + \mid \Sigma_5 \mid &\leq 2 b (w(t) + w(t-\delta) + w'(t) + w'(t-\delta)) \cdot \\ &\cdot \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^M \mid D_i D_l L_y f \mid_2 \int_{[r-t-\delta, r-t]} \mid b_0(i, l) \mid (d\tau) \end{aligned}$$

Zu  $\Sigma_3$  und  $\Sigma_6$ :

Man schätzt den Integranden auf

$$\{ z \mid \chi_m(z) > 0 \} \text{ und auf } \{ z \mid 1 - \chi_m(z) > 0 \}$$

durch sein Supremum ab:

auf  $\{ z \mid 1 - \chi_m(z) > 0 \}$  ist

$$\begin{aligned} \mid (T(\tau, r) - T(s, r)) L_y f(z) \mid &\leq \\ &\leq \sup \{ \mid (T(\tau, r) - T(s, r)) L_y f \mid \mid \tau \in ]t-r-\delta, t-r] \} \end{aligned}$$

$$\mid (T(\tau, r) - T(s, r)) \sum_{i=1}^M D_i L_y f(e) f_i(z) \mid \leq$$

$$\leq \sup \{ \mid (T(\tau, r) - T(s, r)) L_y f \mid_2 \mid \tau \in ]t-r-\delta, t-r] \}$$

auf  $\{ z \mid \chi_m(z) > 0 \}$  erhält man durch Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} \mid (T(\tau, r) - T(s, r)) L_y f(z) - (T(\tau, r) - T(s, r)) L_y f(e) - \\ - (T(\tau, r) - T(s, r)) \sum_{i=1}^M D_i L_y f(e) f_i(z) \mid = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left| \sum_{i,l=1}^M (T(\tau, r) - T(s, r)) D_i D_l L_y f(\xi(z)) F_i(z) f_l(z) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \chi(z) \sup \{ \left| (T(\tau, r) - T(s, r)) L_y f \right|_2 \mid \tau \in ]r-t-\delta, r-t[ \}$$

Damit wird

$$\left| L_3 \right| + \left| L_6 \right| \leq \int_G (\chi(z) \chi_m(z) + (1-\chi_m(z))) \mu_0(dz \times ]r-t-\delta, r-t[) \cdot$$

$$(\sup \{ \left| (T(\tau, r) - T(s, r)) L_y f \right|_2 \mid \tau \in ]r-t-\delta, r-t[ \} +$$

$$+ \sup \{ \left| (T'(\tau, r) - T'(s, r)) L_y f \right|_2 \mid \tau \in ]r-t-\delta, r-t[ \})$$

Definiert man nun

$$w_1(t) := \sup \{ \left| (T(\tau, r) - T(s, r)) L_y f \right|_2 \mid \tau \in ]r-t, r-s[ \text{ für } t \geq s$$

$$\tau \in ]r-s, r-t[ \text{ für } t \leq s$$

und  $w'_1$  wie  $w_1$  mit  $T'$  statt  $T$ , so erhält man

$$\left| L_3 \right| + \left| L_6 \right| \leq 2 (w_1(t) + w_1(t+\delta) + w'_1(t) + w'_1(t+\delta)) \cdot$$

$$\cdot \int_G (1 - \chi_m(z) + \chi(z) \chi_m(z)) \mu_0(dz \times ]r-t-\delta, r-t[)$$

Durch die folgende Definition

$$v(t) := 2 b \sum_{i=1}^M \left| D_i L_y f \right|_2 \int_{]r-t, r]} \left| a_0(i) \right| (d\tau)$$

$$+ 2 b \sum_{l=1}^M \left| D_i D_l L_y f \right|_2 \int_{]r-t, r]} \left| b_0(i, l) \right| (d\tau)$$

$$+ 2 \int_G (1 - \chi_m(z) + \chi(z) \chi_m(z)) \mu_0(dz \times ]r-t, r])$$

$$a(t) := w(t) + w'(t) + w_1(t) + w'_1(t)$$

ergibt sich insgesamt:

$$F(t+\delta, y) - F(t, y) \geq - (a(t) - a(t+\delta)) (v(t+\delta) - v(t)).$$

Offensichtlich ist  $v$  monoton wachsend.

Zu zeigen bleibt:  $\lim_{t \rightarrow s} a(t) = 0$ . Die Hemigruppen sind stetig, d.h.

$(s, t) \mapsto T(s, t) f$  ist stetig  $\forall f \in C^0(G)$ , also ist



$$(s,t) \rightarrow \sum_{i=1}^M \left| T(s,t) f_i(e) \right| + T(s,t) \chi(e) = q(v(s,t)) \text{ stetig}$$

und ebenso  $(s,t) \rightarrow q(v'(s,t))$ ; danach ist

$$\lim_{t \rightarrow s} w(t) = \lim_{t \rightarrow s} w'(t) = 0$$

$(s,t) \rightarrow T(s,t) f$  ist stetig  $\forall f \in C^0(\mathcal{G})$ , also auch

$\tau \rightarrow (T(\tau,r) - T(s,r)) f \forall f \in C^0(\mathcal{G})$  und damit

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \left\| (T(\tau,r) - T(s,r)) L_Y f \right\| + \sum_{i=1}^M \left\| (T(\tau,r) - T(s,r)) D_i L_Y f \right\| + \\ &\quad + \sum_{i,l=1}^M \left\| (T(\tau,r) - T(s,r)) D_i D_l L_Y f \right\| = \\ &= \left\| (T(\tau,r) - T(s,r)) L_Y f \right\| + \sum_{i=1}^M \left\| D_i (T(\tau,r) - T(s,r)) L_Y f \right\| + \\ &\quad + \sum_{i,e=1}^M \left\| D_i D_e (T(\tau,r) - T(s,r)) L_Y f \right\| = \\ &= \left\| (T(\tau,r) - T(s,r)) L_Y f \right\|_2, \forall f \in C_2^0(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

$$\text{also gilt } \lim_{t \rightarrow s} w_1(t) = \lim_{t \rightarrow s} w'_1(t) = 0$$

Damit folgt aber aus dem obigen Lemma 9:  $F(t,x) \geq 0 \forall (t,x)$  und insbesondere  $0 \leq F(t,e) = \int f(z) v(r-t,r) (dz) - \int f(z) v'(r-t,r) (dz)$  für alle  $f \in C_2^0(\mathcal{G})$ ,  $t \leq r$ . Vertauscht man nun  $v$  und  $v'$ , so ergibt sich  $0 \leq \int f(z) v'(r-t,r) (dz) - \int f(z) v(r-t,r) (dz)$  für alle  $f \in C_2^0(\mathcal{G})$ ,  $t \leq r$  und damit dann  $v(s,t) = v'(s,t) \forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ .

Damit ergibt sich nun

#### 10. Satz

Ist  $0 \in D_1$ ,  $D_1$  dicht in  $R_+$ ,  $K_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}_0$  cadlag, monoton wachsend mit  $K_n(0) = 0$ , erfüllen die  $(\mu_{n,j})_{n,j} \stackrel{c}{\subset} \mathbb{M}^1(\mathcal{G})$  die Voraussetzung 1, dann gibt es genau eine stetige Hemigruppe  $\{v(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$  die (4.46)

erfüllt und deren Wahrscheinlichkeitsoperatoren

$$\{ T_{v(s,t)} \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \} \quad (4.42) \text{ erfüllen und für die}$$

$$k_n(t) \quad \mu_{n,j} \quad v(s,t) \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ gilt}$$

$$j = k_n(s) + 1$$

Beweis:

Lemma 2.5 und 2.6 und (4.37) liefern die Existenz von

$\{ v(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$  mit den gewünschten Eigenschaften und die Existenz einer Teilfolge  $(n') \subset (n)$  für die die Konvergenzaussage gilt. Für  $s < t$  ist  $(b_0(i,e)(t) - b_0(i,e)(s))_{i,e=1,\dots,M}$  symmetrisch und nichtnegativ definit:

$$(u_1, \dots, u_M) (b_0(i,e)(t) - b_0(i,e)(s))_{i,e} (u_1, \dots, u_M)^T$$

$$= \lim_n \frac{k_n(t)}{j = k_n(s) + 1} \sum_{i,e=1}^M \int u_i f_i(y) u_e f_e(y) \mu_{n,j}(dy)$$

$$- \sum_{i,e=1}^M \int u_i f_i(y) u_e f_e(y) \mu_0(dy \times (s,t)) \geq 0$$

Mit Lemma 2.8 folgt nun die Eindeutigkeit von  $\{ v(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$  und damit Satz 10.

# 11. Folgerung

$G$  wie bisher aber außerdem ein vollständiger, separabler, metrischer Raum mit (linksinvarianter) Metrik  $d$ ;  $K_n$  wie in Satz 10,  $(G_{n,j})_{n,j}$  zeilenweise unabhängige,  $G$ -wertige Zufallsvariable, für  $\mu_{n,j} := P G_{n,j}^{-1}$  gelte Voraus-

setzung 1;  $\xi_n(t) := \prod_{j=1}^{k_n(t)} G_{n,j}$ ; dann gibt es einen stochastisch stetigen

Prozeß  $\xi$  mit Pfaden in  $D(\mathbb{R}_+, G)$ , so daß

$$\xi_n \xrightarrow{D} \xi \text{ und } v(s,t) := P(\xi^{-1}(s) \xi(t))^{-1}$$

erfüllt die Aussage in Satz 10.

Beweis:

Man verifiziert die Bedingungen von [19], Theorem VI.5.4 (siehe III.2.)

i) folgt sofort mit Satz 2.11

zu ii) : Da  $d(\cdot, \cdot)$  linksvariant ist und  $\xi_n(\cdot)$  unabhängige Zuwächse hat,

$$\begin{aligned} \text{ist } P(d(\xi_n(t), x) > \epsilon \mid \xi_n(s) = x) &= \\ &= P(d(\xi_n^{-1}(s) \xi_n(t), e) > \epsilon) = \\ &= \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n,j}(d(y, e) > \epsilon) \end{aligned}$$

Betrachte  $(0, T)$ .

Sei  $\eta, \epsilon > 0$  vorgegeben. Es gibt nach Lemma 2.4 ein kompaktes  $K$  mit

$$v_n(s, t)(k) \geq 1 - \eta \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T \text{ wo}$$

$$v_n(s, t) := \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n,j}, \text{ o.E. kann man annehmen, daß es eine } \epsilon\text{-Umgebung } G$$

gibt mit  $G \subseteq K \cap \{d(y, e) \leq \epsilon\}$ .

Man wählt nun ein  $f \in C^0(G)$  mit  $1 \leq f \leq 1$  und ein  $\epsilon \setminus \bar{G}$

$g \in \mathcal{D}(G)$  mit  $\|f - g\| \leq \eta$  und  $g|_{G_1} \equiv 0$  für eine  $\epsilon$ -Umgebung  $G_1 \subseteq G$ .

Nach Folgerung 2.2 b) gibt es ein  $\delta$ , so daß

$$\sup \left\{ \left| \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int g(x) \mu_{n,j}(dx) \right| \mid 0 \leq s \leq t \leq T, t-s \leq \delta \right\} \leq \eta$$

$$\forall n \geq n_0$$

(denn :  $f$  stetig,  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $[0, T]$   $\Rightarrow$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ t, s \in T}} |f_n(t) - f_n(s)| = 0$$

Da  $g(e) = 0$  ist, gibt es nach Lemma 3 und (4.14) ein  $n_1 \geq n_0$  und ein

$\delta_1 \leq \delta_0$ , so daß für  $n \geq n_1$ ,  $\delta \leq \delta_1$ ,  $0 \leq t-s \leq \delta_1$ ,  $t, s \leq T$  gilt.

$$\left| \int g(x) v_n(s, t)(dx) \right| \leq$$

$$\leq b \left\| g \right\|_{2,2} \left( \sum_{j=k_n(\delta)+1}^{k_n(t)} q(\mu_{n,j}) \right)^2 + \left| \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int g(x) \mu_{n,j}(dx) \right| \leq 2\eta$$

Damit ergibt sich insgesamt für

$$\begin{aligned}
 n \geq n_1, \quad \delta \leq \delta_1, \quad 0 \leq t-s \leq \delta_1, \quad t, s \leq T: \\
 v_n(s, t) (d(x, e) > \varepsilon) \leq \\
 \leq v_n(s, t) (K \cap \{d(x, e) > \varepsilon\}) + v_n(s, t) (G \setminus K) \leq \\
 \leq \eta + \int f(x) v_n(s, t) (dx) \leq \\
 \leq \eta + \int |f(x) - g(x)| v_n(s, t) (dx) + \int g(x) v_n(s, t) (dx) | \\
 \leq 4\eta, \text{ d.h. also: zu } \varepsilon, \eta > 0 \text{ gibt es } \delta_0, n_0, \text{ so daß für } n \geq n_0, \delta \leq \delta_0 \\
 \sup \{P(d(\xi_n(t), x) > \varepsilon \mid \xi_n(s) = x) \mid 0 \leq t-s \leq \delta; s, t \leq T, x \in G\} \leq \eta \\
 \text{Damit konvergiert } (\xi_n)_n \text{ nach Verteilung auf jedem } (0, T). \text{ Die restlichen} \\
 \text{Behauptungen ergeben sich nun sofort aus Satz 10.}
 \end{aligned}$$

## 12. Folgerung

Sei  $\mu_0$  ein Maß auf  $(G \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{G \times \mathbb{R}_+})$  mit  $\int \chi(y) \mu_0(dy \times [0, t])$  stetig,

$a_0(i), b_0(i, e) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und von beschränkter Variation;  
 für  $s \leq t$  ist  $(b_0(i, e)(t) - b_0(i, e)(s))_{i, e}$  positiv semidefinit;  
 dann gibt es genau eine Hemigruppe  $\{v(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\} \subseteq \mathbb{M}^1(G)$   
 deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsoperatoren  $\{T(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$   
 (4.42) lösen und für die es eine stetige, monoton wachsende Funktion  
 $v_q : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  gibt mit

$$\begin{aligned}
 (4.46) \quad \sup \left\{ \sum_{i=1}^r q(v(s_{i-1}, s_i)) \mid s \leq s_0 < \dots < s_r, r \leq t, r \in \mathbb{N} \right\} \leq \\
 \leq (v_q(t) - v_q(s)) \cdot b_1
 \end{aligned}$$

Beweis:

Wegen Lemma 8 muß nur noch der Existenzbeweis geführt werden. Dazu sei

$$\begin{aligned}
 \text{für } f \in \tilde{C}_2^0(G), t \in \mathbb{R}_+ \\
 (4.47) \quad N(t) f(x) := \sum_{i=1}^M a_0(i)(t) \tilde{D}_i f(x) + \\
 + \frac{1}{2} \sum_{i, l=1}^M b_0(i, l)(t) \tilde{D}_i \tilde{D}_l f(x) +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_G (f(xy) - f(x) - \sum_{i=1}^M \tilde{D}_i f(x) f_i(y)) \mu_0(dy \times [0, t])$$

Nach [10], Theorem 4.25 gibt es dann zu  $N(t) - N(s)$  genau eine Halbgruppe

$(v_r(s, t))_{r \geq 0} \subset M^1(G)$ , deren erzeugender Operator  $\bar{N}(s, t)$  auf  $C_2^0(G)$  mit  $N(t) - N(s)$  übereinstimmt.

Nach [32], S. 239 gilt dann für  $f \in \tilde{C}_2^0(G)$ ,  $r \in R_+$ :

$$(4.48) \quad \int f(x) v_r(s, t)(dx) - f(e) = \\ \int_0^r \left\{ \int \bar{N}(s, t) f(x) v_\sigma(s, t)(dx) \right\} d\sigma$$

Zunächst zeigt man für  $f \in \tilde{C}_2^0(G)$ :

$$(+) \quad \|\bar{N}(s, t) f\| \leq b' \|f\|_2 \left( \sum_{i=1}^M |a_0(i)(t) - a_0(i)(s)| + \right. \\ \left. + \sum_{i,e=1}^M |b_0(i, e)(t) - b_0(i, e)(s)| + \right. \\ \left. + \int_G (1 - \chi_m(y) - \chi(y) \chi_m(y)) \mu_0(dy \times (s, t)) \right)$$

Beweis (+): Aus (4.47) schätzt man die ersten beiden Summanden durch die in (+) ab.

3.-ter Summand:

$$\left| f(xy) - f(x) - \sum_{i=1}^M \tilde{D}_i f(x) f_i(y) \right| \leq \\ \leq \chi_m(y) \cdot \chi(y) \cdot \frac{1}{\chi(y)} \sum_{i,e=1}^M \left| \tilde{D}_i \tilde{D}_e f(x \xi(y)) \right| \left| f_i(y) f_e(y) \right| + \\ + (1 - \chi_m(y)) (|f(xy)| + |f(x)| + \sum_{i=1}^M |\tilde{D}_i f(x)| |f_i(y)|) = \\ \leq \chi_m(y) \chi(y) \|f\|_2^2 + (1 - \chi_m(y)) 3M \|f\|_2^2$$

Aus (+) und (4.48) folgt:

$$\begin{aligned}
 (++) \quad & \left| \int f(x) v_x(s,t) (dx) - f(e) \right| \leq r b \left| f \right|_2 \\
 & \left( \sum_{i=1}^M \left| a_0(i)(t) - a_0(i)(s) \right| + \sum_{i,e=1}^M \left| b_0(i,e)(t) - b_0(i,e)(s) \right| + \right. \\
 & \left. + \int_G (1 - \chi_m(y) + \chi_m(y) \chi(y)) \mu_0(dy \times s, t) \right)
 \end{aligned}$$

Definiert man nun

$$\begin{aligned}
 (4.49) \quad v_q(t) := & \sum_{i=1}^M \int_{[0,t]} \left| a_0(i) \right| (d\tau) + \sum_{i,e=1}^M \int_{(0,t)} \left| b_0(i,e) \right| (d\tau) + \\
 & + \int_G (1 - \chi_m(y) + \chi_m(y) \chi(y)) \mu_0(dy \times [0,t])
 \end{aligned}$$

so ist  $v_q$  stetig, monoton wachsend und es gilt für alle  $f \in \tilde{C}_2^0(G)$

$$(4.50) \quad \left| \int f(x) v_x(s,t) (dx) - f(e) \right| \leq r b \left| f \right|_2 (v_q(t) - v_q(s))$$

Setzt man nun sukzessive  $f_1, \dots, f_M$ ,  $1 - \chi$  ein, so folgt (4.46) für ein  $b_1 \in \mathbb{R}_+$  und insbesondere

$$(4.51) \quad q(v_x(s,t)) \leq b_1 (v_q(t) - v_q(s))$$

Nun setzt man  $k_n(t) := \frac{1}{n} \cdot [nt]$  und  $\mu_{n,k} := v_1\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$  und zeigt, daß für dieses Schema die Voraussetzung 1 erfüllt ist.

Man zeigt zunächst

$$\begin{aligned}
 (4.52) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{[nt]} (f(f(x)) - f(e)) \mu_{n,k} (dx) = \\
 & = N(t) f(e) \quad \forall f \in C_{2,2}, \quad t \in \mathbb{R}_+
 \end{aligned}$$

$N(s,t)$  ist der infinitesimale Erzeuger von  $(v_x(s,t))_{t \geq 0}$ , also gilt

$$(4.53) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{r} (T_{v_x(s,t)} f - f) - (N(t) - N(s)) f \right\| = 0 \quad \forall f \in \tilde{C}_2^0(G)$$

Daraus folgt für  $f \in C_{2,2}$ , da  $T_\mu Df = D T_\mu f$  und  $Df, D D' f \in \tilde{C}_2^0(G)$  für alle  $D, D' \in \mathbb{Q}$ :

$$(4.54) \quad D \bar{N}(s, t) f = \bar{N}(s, t) D f \quad \forall f \in C_{2,2}, D \in \mathbb{Q}$$

$$D D' \bar{N}(s, t) f = \bar{N}(s, t) D D' f \quad \forall f \in C_{2,2}; D, D' \in \mathbb{Q}$$

Insbesondere ist  $\bar{N}(s, t) f \in C_2^0(\mathbb{G})$  für  $f \in C_{2,2}$ , also folgt mit (4.48), (4.51), Ungleichung (A).

$$\begin{aligned} & \left| \int f(x) v_1(s, t)(dx) - f(e) - \bar{N}(s, t) f(e) \right| = \\ & = \left| \int_0^1 \left\{ \int (\bar{N}(s, t) f(x) - \bar{N}(s, t) f(e)) v_\sigma(s, t)(dx) \right\} d\sigma \right|, \\ & \leq \int_0^1 \left\{ b \left| \bar{N}(s, t) f \right|_2 q(v_\sigma(s, t)) \right\} d\sigma \end{aligned}$$

Aus (4.54), (+) und (4.49) folgt

$$(4.55) \quad \left| \bar{N}(s, t) f \right|_2 \leq b' \left| f \right|_{2,2} (v_q(t) - v_q(s))$$

Setzt man dies und (4.51) ein, so ist

$$\begin{aligned} & \left| \int f(x) v_1(s, t)(dx) - f(e) - \bar{N}(s, t) f(e) \right| \leq \\ & \leq b \cdot b' \cdot b_1 \cdot \left| f \right|_{2,2} (v_q(t) - v_q(s))^2 \end{aligned}$$

$$\text{Mit } \int (f(x) - f(e)) \mu_{n,k}(dx) =$$

$$\int f(x) v_1\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(dx) - f(e) \quad \text{folgt nun sofort}$$

$$\lim_n \left| \sum_{k=1}^{[nt]} \int (f(x) - f(e)) \mu_{n,k}(dx) - N\left(\frac{[nt]}{n} f(e) \right) \right| = 0$$

und mit (4.47) dann auch (da  $t \rightarrow N(t) f(e)$  stetig ist) (4.52).

Man zeigt nun:  $(\mu_{n,k})_{k,n}$  erfüllt die Voraussetzung 1 mit den gegebenen

$$a_0(i), b_0(i, e), \mu_0.$$

Zu i) Sei  $V$  eine Umgebung von  $e$ , dann gibt es ein  $m$  mit  $\chi_m \leq 1_V$ ;

$$\begin{aligned} & \text{da } \chi_m(e) = 1 \text{ ist, ist } \mu_{n,k}(\mathbb{G} \setminus V) = - \left( \int_V(x) \mu_{n,k}(dx) - 1 \right) \leq \\ & \leq - \left( \int \chi_m(x) \mu_{n,k}(dx) - \chi_m(e) \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq b \left| \chi_m \right|_2 \left( v_q\left(\frac{k}{n}\right) - v_q\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \text{ nach (4.50);}$$

da  $v_q$  stetig ist folgt i).

Zu ii) : Nach [18], Lemma 1.7.iii) gibt es eine Folge  $(g_m) \subset \mathcal{D}(\mathcal{G})$  mit Werten in  $\mathbb{R}_+$ ,  $\sup \{ \|g_m\|_{2,2} \mid m \in \mathbb{N} \} < \infty$ ,  $g_m \uparrow 1_{\mathcal{G}}$ , zu jedem kompakten  $K$  aus dem System der  $\varepsilon$ -Umgebungen gibt es ein  $m$ , so daß  $g_m(x) = 1 \ \forall x \in K$ .

Sei  $G_m := \text{Träger von } g_m$ , dann ist  $\mu_{n,k}(\mathcal{G} \setminus G_m) = 1 - \int_{G_m} 1_{G_m}(x) \mu_{n,k}(dx) \leq \int (g_m(e) - g_m(x)) \mu_{n,k}(dx)$ , mit (4.52) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{[nt]} \mu_{n,k}(\mathcal{G} \setminus G_m) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{[nt]} \int (g_m(e) - g_m(x)) \mu_{n,k}(dx) = \\ &= -N(t) g_m(e) \end{aligned}$$

Für hinreichend großes  $m$  gibt es eine Umgebung  $v$  von  $e$ , auf der  $g_m$  konstant 1 ist, also ist dann

$$\begin{aligned} -N(t) g_m(e) &= - \int (g_m(y) - 1) \mu_0(dy \times [0,t]) \\ 0 \leq 1 - g_m &\leq 1 - 1_v \text{ und } 1 - g_m = 0, \text{ also: } \lim_m N(t) g_m(e) = 0 \text{ und damit:} \end{aligned}$$

$$(4.56) \quad \lim_m \lim_n \sum_{k=1}^{[nt]} \mu_{n,k}(\mathcal{G} \setminus G_m) = 0$$

Ist  $f \in C_{2,2}$  und verschwindet  $f$  in einer Umgebung von  $e$ , so folgt mit (4.52):

$$(4.57) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{[nt]} \int f(x) \mu_{n,k}(dx) = \int f(x) \mu_0(dx \times [0,t])$$

Da  $C_{2,2}$  dicht ist in  $C^0(\mathcal{G}) = K(\mathcal{G})$ , so gilt diese Aussage auch für alle  $f \in K(\mathcal{G})$ , die in einer  $\varepsilon$ -Umgebung verschwinden. Daraus folgt aber zusammen mit (4.56) sofort ii) aus:  $f \in C^b(\mathcal{G})$  und  $f$  verschwindet in einer Umgebung von  $e$ ,  $f = f \cdot g_m + f(1 - g_m)$  mit  $f \cdot g_m \in K(\mathcal{G})$  und  $\|f\| \geq \|f(1 - g_m)\| \rightarrow 0$ , also

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) \mu_0(dx \times [0,t]) - \sum_{k=1}^{[nt]} \int f(x) \mu_{n,k}(dx) \right| &\leq \\ \leq \left| \int (f \cdot g_m)(x) \mu_0(dx \times [0,t]) - \sum_{k=1}^{[nt]} \int (f \cdot g_m)(x) \mu_{n,k}(dx) \right| + \end{aligned}$$



$$+ \| f \| \mu_0 ( (G \setminus G_m) \times (0, t) ) + \| f \| \sum_{k=1}^{[nt]} \mu_{n,k} (G \setminus G_m)$$

Zu iii):  $f(x) := f_i(x) \cdot f_e(x)$ , aus (4.52) und (4.47) folgt sofort die Behauptung.

Zu iv):  $f(x) = f_i(x)$ , Behauptung folgt wie oben aus (4.52) und (4.47).

Zu v): Nach (4.51) ist

$$\begin{aligned} \left| \int f_i(x) \mu_{n,k}(dx) \right| &\leq q \left( v_1 \left( \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right) \right) \leq \\ &\leq b_1 \left( v_q \left( \frac{k}{n} \right) - v_q \left( \frac{k-1}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

also wird

$$\sum_{k=[ns]+1}^{[nt]} \left| \int f_i(x) \mu_{n,k}(dx) \right| \leq b_1 \left( v_q \left( \frac{[nt]}{n} \right) - v_q \left( \frac{[ns]}{n} \right) \right)$$

da  $v_q$  stetig ist, folgt v).

Aus Satz 10, Lemma 8, (4.31) und (4.51) folgt die Behauptung.

### 13. Folgerung

$\nu_0, a_0(i), b_0(i, e)$ ,  $i, e = 1, \dots, M$  werden in Folgerung 12 eindeutig durch die Hemigruppe  $\{ v(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$  bestimmt.

#### Beweis:

Man zeigt

$$\begin{aligned} (4.58) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{[nt]} \left( \int f(x) v \left( \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right) - f(e) \right) &= \\ &= N(t) f(e) \quad \forall f \in C_{2,2}, t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Wähle  $\mu_{n,k}$  wie im Beweis zu Folgerung 12; falls es verschiedene

$(\mu_0, a_0(i), b_0(i, e))$  gibt, wählt man sich einen beliebigen dieser Vektoren aus.

Sei  $I_j := \{ 1 \mid \frac{j-1}{n} < \frac{1}{n \cdot m} \leq \frac{j}{n} \}$ , dann gilt, da  $v$  eindeutig ist,

(+)  $\sum_{1 \in I_j} \mu_{n \cdot m, 1} \rightarrow v \left( \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right)$ , gleichgültig, welchen der Vektoren man

auswählte. Nach (4.17) gilt für  $f \in C_{2,2}$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{[nt]} \left( \int f(y) \sum_{1 \in I_j} \mu_{n \cdot m, 1}(dy) - f(e) - \sum_{1 \in I_j} f(f(y) - f(e)) (\mu_{n \cdot m, 1}(dy)) \right) \right| \\ & \leq b^2 \left| f \right|_{2,2} \sum_{j=1}^{[nt]} \left( \sum_{1 \in I_j} q(\mu_{n \cdot m, 1}) \right)^2 \leq \\ & \leq b^2 b_1^2 \left| f \right|_{2,2} \cdot \sum_{j=1}^{[nt]} \left( v_q \left( \frac{j}{n} \right) - v_q \left( \frac{j-1}{n} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

Mit (+) und (4.52) folgt:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{[nt]} \left( \int f(y) v \left( \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right) (dy) - f(e) \right) - N(t) f(e) \right| \leq \\ & \leq b_2^2 \left| f \right|_{2,2} \sum_{j=1}^{[nt]} \left( v_q \left( \frac{j}{n} \right) - v_q \left( \frac{j-1}{n} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

und damit, da  $v_q$  stetig und monoton wachsend ist, gilt (4.58). Da jedoch  $\{v(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$  eindeutig ist nach Voraussetzung, ist damit auch  $N(t) f(e)$  eindeutig bestimmt für alle  $f \in C_{2,2}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Für  $f \in C_2^0(\mathbb{G})$  ist  $D_i f(e) = \tilde{D}_i f(e)$   $i=1, \dots, M$  und

$\tilde{D}_i \tilde{D}_j f(e) = \tilde{D}_i \tilde{D}_j f(e)$ ,  $i, j=1, \dots, M$ , also wird durch

$A(f) := N(t) f(e)$ ,  $f \in C_2^0(\mathbb{G})$  das erzeugende Funktional der zu  $N(t)$  gehörenden Faltungshalbgruppe  $(v_r(0, t))_{t \geq 0}$  festgelegt.

Angenommen, für ein  $t \in \mathbb{R}_+$  gäbe es zwei verschiedene  $(a_0(i)(t), B_0(i, e)(t), \mu_0(\cdot \times [0, t]))_{i,1}$  und  $(a'_0(i)(t), b'_0(i, e)(t), \mu'_0(\cdot \times [0, t]))_{i,e}$ , dann würden sich nach [10], Theorem 4.4.16 (A) die zugehörigen Funktionale  $A$  und  $A'$  auf  $\mathcal{D}(\mathbb{G})$  unterscheiden, d.h.

$A(f) \neq A'(f)$  für ein  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ , dies ist aber ein Widerspruch zu

$A(f) = N(t) f(e) = N'(t) f(e) = A'(f) \forall f \in C_{2,2} \not\subset \mathcal{D}(\mathbb{G})$ .

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich übertragen auf Lie-projektive Gruppen, dabei heißt  $G$  Lie-projektiv, wenn  $G$  der projektive Limes von Lie-Gruppen  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ ,  $G = \varprojlim_{\alpha \in A} G_\alpha$ , ist, wobei  $G_\alpha = G / H_\alpha$ ,  $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine fallende Familie kompakter, normaler Untergruppen von  $G$  mit

$\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha = \{e\}$ . Mit  $p_\alpha$  ( $p_{\alpha, \beta}$ ) bezeichnet man die kanonische Projektion

von  $G$  auf  $G / H_\alpha$  ( von  $G / H_\beta$  auf  $G / H_\alpha$  ).

Definiert man  $\beta_\alpha : D(G / H_\alpha) \rightarrow K(G)$  durch  $\beta_\alpha(f_\alpha) := f_\alpha \circ p_\alpha$   $\forall f_\alpha \in D(G / H_\alpha)$  und  $D_\alpha(G) := \beta_\alpha(D(G / H_\alpha))$ , so ist der induktive Limes  $D(G) = \varinjlim_{\alpha \in A} D_\alpha(G)$  ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum.

Man nennt  $D(G)$  den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen in  $K(G)$  und setzt  $D_1(G) := \{f \in D(G) \mid f(e) = 0\}$ ,

$D_0(G) := \{f \in D_1(G) \mid f \geq 0\}$ .

Man definiert nun verschiedene Typen von linearen Funktionalen auf  $D(G)$  :

#### 14. Definition

Ein reelles, lineares Funktional  $A$  auf  $D(G)$  heißt

- a) fast positiv, wenn  $A(f) \geq 0 \quad \forall f \in D_0(G)$
- b) eine primitive Form, wenn es fast positiv ist und für  $f, g \in D(G)$ ,  $g^*(x) := g(x^{-1})$  gilt  $A(fg^*) = A(f)g(e) - f(e)A(g)$
- c) eine quadratische Form, wenn es fast positiv ist und für  $f, g \in D(G)$  gilt  $A(fg) + A(fg^*) = 2(A(f)g(e) + f(e)A(g))$
- d) konzentriert (im Ursprung), wenn für alle  $f \in D(G)$  und jedes  $g \in D(G)$  mit  $g|_U \equiv 1$  für eine  $e$ -Umgebung  $U$  gilt:  $A(fg) = A(f)$
- e) normiert, wenn für eine Umgebung  $U$  aus mit  $K_U := \{f \in D(G) \mid 1_U \leq f \leq 1_G\}$  gilt:  $\sup \{A(f) \mid f \in K_U\} = 0$ .

Ist  $G$  eine Lie-Gruppe,  $\{D_1, \dots, D_M\}$  Basis der Lie-Algebra, dann ist für

$$a_1, \dots, a_M \in \mathbb{R} \quad \Psi_1(f) := \sum_{i=1}^M a_i (D_i f)(e) \text{ eine primitive Form.}$$

Ist  $(A_{i,j})_{i,j \leq M}$  eine symmetrische, positiv-demidefinierte Matrix, so ist

$$\Psi_2(f) := \sum_{i,j=1}^M a_{i,j} (D_i D_j f)(e) \text{ eine quadratische Form.}$$

### 15. Definition

a) Eine Abbildung  $\Gamma : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathcal{D}(G)$  heißt eine Levy-Abbildung für  $G$ , wenn gilt

(LM 1) für jede primitive Form  $A$  auf  $\mathcal{D}(G)$  und jedes  $f \in \mathcal{D}(G)$  ist

$$A(f - \Gamma(f)) = 0$$

(LM 2)  $(\Gamma(f))^* = -\Gamma(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(G)$

(LM 3) für jedes  $x \in G$  ist die Abbildung  $f \mapsto \Gamma(f)(x)$  eine primitive Form

b) Ein Maß  $\eta \in \mathbb{M}_+(\mathcal{D}(G))$  mit  $\eta(\{e\}) = 0$  heißt ein Levy-Maß auf  $G$ , falls

(i)  $\eta(G \setminus U) < \infty$  für alle  $e$ -Umgebungen  $U$

(ii)  $\int f d\eta < \infty \quad \forall f \in \mathcal{D}_0(G)$

Ist  $G$  eine Lie-Gruppe,  $(D_1, \dots, D_M)$  die Basis der Lie-Algebra und

$f_1, \dots, f_M$  ein Koordinatensystem, so ist

$$\Gamma(f) := \sum_{i=1}^M (D_i f)(e) f_i \text{ eine Levy-Abbildung.}$$

Ist  $\phi$  eine Hunt-Funktion für  $G$  und  $\eta \in \mathbb{M}_+(\mathcal{D}(G))$  mit  $\eta(\{e\}) = 0$ , so sind äquivalent:

(i)  $\eta$  ist ein Levy-Maß

(ii)  $\int \phi d\eta < \infty$

Es gilt folgende Aussage ( [10], Theorem 4.5.9 (B) ):

Ist  $G$  eine lokalkompakte Gruppe,  $\Gamma$  eine Levy-Abbildung für  $G$ ,  $\Psi_1$  eine primitive und  $\Psi_2$  eine quadratische Form,  $\eta$  ein Levy-Maß auf  $G$  und

$$(4.59) \quad A(f) := \Psi_1(f) + \Psi_2(f) + \int (f - f(e) - \Gamma(f)) d\eta,$$

$\forall f \in \mathcal{D}(G)$  dann ist  $A$  ein fast positives, normiertes Funktional auf  $\mathcal{D}(G)$  und es gibt genau eine Faltungshalbgruppe  $(\mu_t)_{t \geq 0} \subset \mathbb{M}^1(G)$ , deren erzeugendes Funktional auf  $\mathcal{D}(G)$  mit  $A$  übereinstimmt.

Nun überträgt man Voraussetzung 1 auf den allgemeinen Fall:

#### Voraussetzung 2

$(\mu_{n,j})_{n,j} \subset \mathbb{M}^1(G)$ ,  $K_n : (\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}_0)$  cadlag, monoton wachsend mit  $K_n(0) = 0$ ,  $D_1$  dicht in  $\mathbb{R}_+$  mit  $0 \in D_1$ .

i) Für jede Umgebung  $U$  von  $e$ ,  $t \in D_1$  gilt

$$\max \{ \mu_{n,j}(G \setminus U) \mid j \leq K_n(t) \} \rightarrow 0$$

ii)  $\mu_0$  ist ein Maß auf  $(G \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{G \times \mathbb{R}_+})$ , so daß  $\mu_0(\cdot \times [0, t])$

ein Levy-Maß ist  $\forall t$ ,  $t \mapsto \int f(y) \mu_0(dy \times [0, t])$  ist stetig

$\forall f \in \mathcal{D}_0(G)$ , für  $\mu_n(G \times [0, t]) := \sum_{j=1}^{K_n(t)} \mu_{n,j}(G)$  und jedes

$f \in C^b(G)$ , das in einer Umgebung von  $e$  verschwindet, gilt

$$\int f(y) \mu_n(dy \times [0, t]) \rightarrow \int (f(y) \mu_0(dy \times [0, t])) \quad \forall t \in D_1$$

iii)  $\Psi_2(t)$  ist eine quadratische Form  $\forall t \in \mathbb{R}_+$  und  $t \mapsto \Psi_2(t)(f)$  ist stetig  $\forall f \in \mathcal{D}(G)$ .

$$\int f^2(y) \mu_n(dy \times [0, t]) \rightarrow \Psi_2(t)(f) + \int f^2(y) \mu_0(dy \times [0, t])$$

$$\forall t \in D_1, f \in \mathcal{D}(G)$$

iv)  $\Psi_1(t)$  ist eine primitive Form  $\forall t \in \mathbb{R}_+$  und  $t \rightarrow \Psi_1(t)(f)$  ist stetig  $\forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$

$$\sup \left\{ \left| \int f(y) \mu_n(dy \times [0, t]) - \Psi_1(t)(f) \right| \mid t \leq T \right\} \rightarrow 0$$

$$\forall T \in \mathbb{R}_+, f \in \mathcal{D}_1(\mathcal{G})$$

v) Für alle  $R \in \mathbb{R}_+$ ,  $f \in \mathcal{D}_1(\mathcal{G})$  gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{k_n(t)}{j=k_n(s)+1} \left| \int f(y) \mu_{n,j}(dy) \right| \mid s, t \leq T, |s-t| \leq \delta \right\} = 0$$

### 16. Satz

Ist Voraussetzung 2 erfüllt für die Lie-projektive Gruppe  $\mathcal{G}$ , dann gibt es eine stetige Hemigruppe  $\{v(s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\} \subseteq \mathbb{M}^1(\mathcal{G})$  mit

$$v_n(s, t) := \frac{k_n(t)}{j=k_n(s)+1} \mu_{n,j} \rightarrow v(s, t) \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2$$

### Beweis:

Sei  $\alpha \in A$  beliebig.

Für  $f^\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{G} / H_\alpha)$  definiert man  $\Psi_1^\alpha(t)(f^\alpha) := \Psi_1(t)(f^\alpha \circ p_\alpha)$  und  $\Psi_2^\alpha(t)(f^\alpha) := \Psi_2(t)(f^\alpha \circ p_\alpha)$

Da nach [10], Lemma 4.4.4  $f^\alpha \circ p_\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$  ist, falls  $f^\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{G} / H_\alpha)$  ist, sind diese Definitionen möglich. Man sieht sofort, daß  $\Psi_1^\alpha(t)$  eine primitive und  $\Psi_2^\alpha(t)$  eine quadratische Form auf  $\mathcal{D}(\mathcal{G} / H_\alpha)$  ist. Man wählt nun eine nach [10], Theorem 4.4.13 existierende Levy-Abbildung  $\Gamma^\alpha$  auf  $\mathcal{D}(\mathcal{G} / H_\alpha)$ . Man definiert  $\mu_\alpha^\alpha$  durch

$$\mu_\alpha^\alpha(\mathcal{G}_\alpha \times I) = \int \int 1_{\mathcal{G}_\alpha \times I}(p_\alpha(y), t) \mu_0(dy \times dt)$$

Es ist leicht zu sehen, daß  $\mu_\alpha^\alpha$  ein Levy-Maß ist:  $\mathcal{G} / H_\alpha$  ist Lie-Gruppe, sei  $\phi^\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{G} / H_\alpha)$  eine Hunt-Funktion, dann ist  $\phi^\alpha \circ p_\alpha \in \mathcal{D}_0(\mathcal{G})$ , also  $t \rightarrow \int \phi^\alpha(y) \mu_\alpha^\alpha(dy \times [0, t]) < \infty \quad \forall t$  und  $t \rightarrow \int \phi^\alpha(y) \mu_\alpha^\alpha(dy \times [0, t])$  stetig

Sei  $\{D_1, \dots, D_M\} \subseteq \mathfrak{Q}$  eine  $\mathfrak{Q}_\alpha$ -Basis (wo  $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G}_\alpha)$  die Lie-Algebra von  $\mathfrak{G}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_\alpha)$  ist, d.h.  $d p_\alpha(D_1), \dots, d p_\alpha(D_M)$  ist eine Basis von  $\mathfrak{Q}_\alpha$ ). Es gibt nach [10], Lemma 4.4.12 ein Koordinatensystem

$$f_1^\alpha, \dots, f_M^\alpha \in \mathcal{D}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_\alpha) \quad \text{mit} \quad \Gamma^\alpha(f^\alpha) = \sum_{i=1}^M (d p_\alpha(D_i) f^\alpha)(e_\alpha) f_i^\alpha.$$

Nach [10], Lemma 4.4.9 hat man für  $\Psi_1^\alpha(t)$ ,  $\Psi_2^\alpha(t)$  die Darstellung

$$\Psi_1^\alpha(t)(f^\alpha) = \sum_{i=1}^M (d p_\alpha(D_i) f^\alpha)(e_\alpha) a_0(i)(t)$$

$$\Psi_2^\alpha(t)(f^\alpha) = \sum_{i=1}^M (d p_\alpha(D_i) d p_\alpha(D_j) f^\alpha)(e_\alpha) b_0(i,j)(t)$$

wobei  $a_0(1)(t), \dots, a_0(M)(t) \in \mathbb{R}$ ,  $(b_0(i,j)(t))_{i,j \leq M} \in \mathbb{M}^M$  eine symmetrische, positiv-semidefinite Matrix ist. Damit ist

$$\begin{aligned} \Psi_1^\alpha(t)(f^\alpha \circ p_\alpha) &= \Psi_1^\alpha(t)(f^\alpha) = \\ &= \sum_{i=1}^M (d p_\alpha(D_i) f^\alpha)(e_\alpha) a_0(i)(t) \end{aligned}$$

Da  $\Psi_1^\alpha(t)(f)$  stetig ist für alle  $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ , muß  $a_0(i)(t)$  stetig sein für  $i = 1, \dots, M$ . Ebenso folgt, daß  $t \mapsto b_0(i,j)(t)$  stetig ist. Damit erfüllen  $a_0$ ,  $b_0$  und  $\mu_0^\alpha$  die Anforderungen in Voraussetzung 1. Man setzt

$$\text{nun } \mu_{n,j}^\alpha = p_\alpha(\mu_{n,j}) \text{ und } v_n^\alpha(s,t) := \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n,j}^\alpha = p_\alpha \left( \sum_{j=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n,j} \right)$$

(denn man sieht sofort, daß  $f \circ d p_\alpha(\mu \rtimes v) = f \circ p_\alpha d(\mu \rtimes v) = f \circ d(p_\alpha(\mu) \rtimes p_\alpha(v))$  ist, da  $p_\alpha$  ein Homomorphismus ist.)

Man zeigt nun, daß Voraussetzung 1 für  $(\mu_{n,j}^\alpha)_{n,j}$  erfüllt ist:

Zu i) : Sei  $G_\alpha$  eine Umgebung von  $e_\alpha$ , dann ist  $p_\alpha^{-1}(G_\alpha)$  eine Umgebung von  $e$ , also  $(\mu_{n,j}^\alpha)((\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_\alpha) \setminus G_\alpha) \leq \mu_{n,j}(\mathfrak{G} \setminus p_\alpha^{-1}(G_\alpha))$ , damit folgt die Behauptung aus Voraussetzung 1 i).

Zu ii): Sei  $\phi^a$  eine Hunt-Funktion mit  $\phi^a|_U \equiv \sum_{i=1}^M (f_1^a)^2|_U$  für eine

$e_a$ -Umgebung  $U_a$ , dann ist  $\phi^a \circ p_a \in \mathcal{D}_0(\mathcal{G})$ , also ist

$$t \mapsto \int \phi^a(y) \mu_0^a(dy \times [0, t]) = \int \phi^a \circ p_a(x) \mu_0(dx \times [0, t])$$

stetig; Sei  $g^a \in C^b(\mathcal{G}/\mathcal{H}_a)$  und  $g^a|_{U_a} \equiv 0$  für eine  $e_a$ -Umgebung

$U_a$ , dann gibt es eine  $e$ -Umgebung  $U$  mit  $p_a(U) \subseteq U_a$ , also  $g^a \circ p_a|_U \equiv 0$ , damit folgt:

$$\int g^a(y) \mu_n^a(dy \times [0, t]) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} \int g^a(y) p_a(\mu_{n,j}) (dy) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n(t)} \int g^a \circ p_a(x) \mu_{n,j}(dx) +$$

$$+ \int g^a \circ p_a(x) \mu_0(dx \times [0, t]) = \int g^a(y) \mu_0^a(dy \times [0, t]) \quad \forall t \in D_1$$

damit ist auch ii) erfüllt.

$$\text{Zu iii): } b_n(i, i)(t) = \sum_{j=1}^{k_n(t)} \int (f_1^a(y))^2 \mu_{n,j}^a(dy) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n(t)} \int (f_1^a \circ p_a(x))^2 \mu_{n,j}(dx) +$$

$$+ \int (f_1^a \circ p_a(x))^2 \mu_0(dx \times [0, t]) =$$

$$= \psi_2^a(t) (f_1^a) - \int (f_1^a(y))^2 \mu_0^a(dy \times [0, t]) \quad \forall t \in D_1,$$

da  $f_1^a \circ p_a \in \mathcal{D}_1(\mathcal{G})$  ist. Mit

$$f_1^a f_j^a = \frac{1}{2} ((f_1^a + f_j^a)^2 - (f_1^a)^2 - (f_j^a)^2) \text{ folgt die}$$

Behauptung für  $b_n(i, j)(t)$ .

$$\text{zu iv): } |a_n(i)(t) - a_0(i)(t)| =$$

$$| \sum_{j=1}^{k_n(t)} \int f_1^a \circ p_a(x) \mu_{n,j}(dx) - a_0(i)(t) | =$$

$$= | \int f_1^a \circ p_a(x) \mu_0(dx \times [0, t]) - a_0(i)(t) | \leq$$

$$\leq | f_1^a \circ p_a(x) \mu_0(dx \times [0, t]) - \psi_1(t) (f_1^a \circ p_a) | +$$

$$+ | \psi_1(t) (f_1^a) - a_0(i)(t) |;$$



Mit Voraussetzung 2 iv) und  $\psi_1^\alpha(t) (f_1^\alpha) = a_0(i)(t)$  folgt, daß die Voraussetzung 1 iv) erfüllt ist.

Zu v) :  $\int f_i^\alpha(y) \mu_{n,j}^\alpha(dy) =$   
 $= \int f_i^\alpha \circ p_\alpha(x) \mu_{n,j}(dx)$  ; da für  $f_i^\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{G}/H_\alpha)$   
 $f_i^\alpha \circ p_\alpha \in \mathcal{D}_1(\mathcal{G})$  ist, folgt Voraussetzung 1 v) aus  
 Voraussetzung 2 v)

Mit Satz 10 folgt nun: Es gibt genau eine stetige Hemigruppe

$$\{ v^\alpha(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \} \subset \mathbb{M}^1(\mathcal{G}/H_\alpha)$$

$$\text{mit } v_n^\alpha(s,t) \xrightarrow{w} v^\alpha(s,t) \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Dies gilt für alle  $\alpha \in A$ . Ist  $p_{\alpha,\beta} : \mathcal{G}/H_\beta \rightarrow \mathcal{G}/H_\alpha$  die konische Abbildung ( $\alpha < \beta$ ), dann ist  $p_{\alpha,\beta}(v_n^\beta(s,t)) = \lim_n p_{\alpha,\beta}(v_n^\beta(s,t)) =$   
 $= \lim_n p_\alpha(v_n(s,t)) = v^\alpha(s,t).$

Damit ist  $(v^\alpha(s,t))_{\alpha \in A}$  ein projektives System von Maßen.

Nach [10], Theorem 1.2.17 existiert genau ein Maß  $(v(s,t) \in \mathbb{M}^1(\mathcal{G}))$ ,  
 der projektive Limes  $\varprojlim_{\alpha \in A} v^\alpha(s,t)$  mit  $p_\alpha(v(s,t)) = v^\alpha(s,t) \quad \forall \alpha$ .

Sei  $f^\alpha \in K(\mathcal{G}/H_\alpha)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \int f^\alpha \circ p_\alpha(x) v_n(s,t)(dx) &= \int f^\alpha(y) v_n^\alpha(s,t)(dy) \\ &\rightarrow \int f^\alpha(y) v^\alpha(s,t)(dy) = \int f^\alpha \circ p_\alpha(x) v(s,t)(dx) \end{aligned}$$

Da  $\{ f^\alpha \circ p_\alpha \mid f^\alpha \in K(\mathcal{G}/H_\alpha), \alpha \in A \}$  in  $K(\mathcal{G})$  dicht ist, folgt  
 damit:  $v_n(s,t) \xrightarrow{w} v(s,t).$

$$\begin{aligned} s_n \rightarrow s, t_n \rightarrow t \Rightarrow \int f^\alpha \circ p_\alpha(x) v(s_n, t_n)(dx) \\ \rightarrow \int f^\alpha \circ p_\alpha(x) v(s,t)(dx) \quad \forall \alpha \in A, \end{aligned}$$

also ist  $\{ v(s,t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \}$  eine stetige Hemigruppe von Maßen.

17 Bemerkung

- a) Ist  $G$  eine Lie-Gruppe, dann sind Voraussetzung 1 und 2 identisch, wie man sofort durch Taylorentwicklung der Funktionen in Voraussetzung 2 feststellen kann.
- b) Natürlich kann man jede diskrete Gruppe als Lie-Gruppe auffassen (siehe [18], 1.4)
- c) Jede Moore-Gruppe und damit insbesondere jede kompakte Gruppe ist Lie-projektiv ([10], Theorem N), also gilt Satz 2.16 speziell auch für kompakte Gruppen.

# ANHANG

## A.-Hilfssätze

Einige Sätze, die in der Arbeit benötigt, aber nicht in direktem Zusammenhang mit ihr stehen, sollen deshalb hier bewiesen werden.

Zunächst ein Satz, der in etwas schwächerer Form in [2], Theorem 4.2 steht.

### A.1 Satz

$(S, g)$  vollständiger, separabler, metrischer Raum; für festes  $m$  seien  $Y_n$  und  $X_{n,m}$  auf dem gleichen  $W$ -Raum definiert für alle  $n$ ;

Sei  $\lim_n \lim_n P ( g (Y_n, X_{n,m}) > \delta ) = 0 \quad \forall \delta > 0$ ;

es gebe eine Folge  $(X_m)_m$ , so daß  $X_{n,m} \xrightarrow{D} X_m \quad \forall m$ .

Dann gilt: Es gibt ein  $X$  mit  $Y_n \xrightarrow{D} X, X_m \xrightarrow{D} X$

### Beweis:

Sei  $\eta, \delta > 0$  beliebig. Wähle  $m$  und  $n_1$ , so daß

$$P ( g (X_{n,m}, X_n) > \delta ) < \eta \quad \forall n \geq n_1.$$

Wähle ein kompaktes  $K$  mit  $P (X_m \notin K) \leq \eta$ .

$$K_\delta^0 := \{ s \in S \mid g(s, K) < \delta \} \text{ ist offen } \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P (X_{n,m} \in K_g^0) \geq P (X_m \in K_g^0) \geq 1 - \eta,$$

also gibt es ein  $n_2 \geq n_1$ , so daß

$$P (X_{n,m} \in K_g^0) \geq 1 - 2\eta \quad \forall n \geq n_2. \text{ Also}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2\eta &\leq P (X_{n,m} \in K_\delta^0) \leq P (Y_n \in K_{2\delta}^0) + P (g(Y_n, X_{n,m}) > \delta) \leq \\ &\leq P (Y_n \in K_{2\delta}^0) + \eta \quad \forall n \geq n_2 \Rightarrow P (Y_n \in K_{2\delta}^0) \geq 1 - 3\eta \quad \forall n \geq n_2. \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \bigwedge_{\delta, \eta} \bigvee_{n_0, k} \bigwedge_{n \geq n_0} P (g(Y_n, K) > \delta) \leq \eta$$

Dann ist  $(P Y_n^{-1})_n$  relativ kompakt, also gibt es ein  $X$  und

eine Teilfolge  $(Y_{n_r})_r \overset{C}{\subset} (Y_n)_n$  mit  $Y_{n_r} \xrightarrow{D} X$ .

Sei nun  $F \subseteq S$  abgeschlossen,  $F_\delta^\circ := \{ s \in F \mid g(s, F) < \delta \}$  ist offen,

$$\text{also: } P(X_m \in F_\delta^\circ) \leq \lim_n P(X_{n,m} \in F_\delta^\circ) \leq$$

$$\leq \lim_r P(Y_{n_r} \in F_{2\delta}^\circ) + \overline{\lim}_r P(g(Y_{n_r}, X_{n_r,m}) \geq \delta) \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_r P(g(Y_{n_r}, F) \leq 2\delta) + \overline{\lim}_r P(g(Y_{n_r}, X_{n_r,m}) \geq \delta)$$

$$\leq P(g(X, F) \geq 2\delta) + \overline{\lim}_r P(g(Y_{n_r}, X_{n_r,m}) \geq \delta)$$

Damit gilt aber nun:

$$\overline{\lim}_m P(X_m \in F) \leq \overline{\lim}_m P(X_m \in F_\delta^\circ) \leq$$

$$\leq P(g(X, F) \leq 2\delta) + \overline{\lim}_m \overline{\lim}_r P(g(Y_{n_r}, X_{n_r,m}) \geq \delta)$$

$$= P(g(X, F) \leq 2\delta)$$

$$F \text{ abgeschlossen} \Rightarrow \{s \mid d(s, F) \leq 2\delta\} \searrow F \Rightarrow$$

$$\bigwedge_{\eta > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{\delta' \leq \delta} P(g(X, F) \leq 2\delta') \leq P(X \in F) + \eta \Rightarrow$$

$$\overline{\lim}_m P(X_m \in F) \leq P(X \in F) + \eta. \text{ Damit gilt: } X_m \xrightarrow{D} X.$$

Sei  $F \subseteq S$  abgeschlossen.

$$\overline{\lim}_n P(Y_n \in F) \leq \overline{\lim}_n P(g(X_{n,m}, F) \leq \delta) + \overline{\lim}_n P(g(X_{n,m}, X_n) > \delta)$$

$$\leq P(g(X_m, F) \leq \delta) + \overline{\lim}_n P(g(X_{n,m}, Y_n) > \delta) \Rightarrow$$

$$\overline{\lim}_n P(Y_n \in F) = \overline{\lim}_m \overline{\lim}_n P(Y_n \in F) \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_m P(g(X_m, F) \leq \delta) + \overline{\lim}_m \overline{\lim}_n P(g(X_{n,m}, Y_n) > \delta)$$

$$\leq P(g(X, F) \leq \delta) \searrow_{\delta \rightarrow 0} P(X \in F)$$

$$\text{Also: } \overline{\lim}_n P(Y_n \in F) \leq P(X \in F) \Rightarrow Y_n \xrightarrow{D} Y$$

Der nächste Satz ist die bedingte Version einer bekannten Abschätzung mit (deshalb) modifiziertem Beweis.

## A 2. Satz

Ist  $(M_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein positives Submartingal,

$\sup_n E M_n^2 < \infty$ ,  $f_0 \subseteq f_1$ , dann gilt:  $M_n + M_\infty$  f.s.

$$E \left( \sup_n M_n^2 \mid f_0 \right) \leq 4 E \left( M_\infty^2 \mid f_0 \right) \leq 4 \sup_n \left( M_n^2 \mid f_0 \right)$$

Beweis:

Es gilt:  $(M_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist ein gleichmäßig integrierbares Submartingal,

$M_n + M_\infty$  f.s. und in  $L_1$  und  $(M_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}(\infty)$  ist ein Submartingal.

$\tau := \begin{cases} \inf \{ n \in \mathbb{N} \mid M_n > \alpha \} & \text{falls } \{ n \in \mathbb{N} \mid M_n > \alpha \} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$  ist eine Stopzeit.

$\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n > \alpha \} = \{ \tau < \infty \}$ . Für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  gilt:

$$\begin{aligned} \alpha P \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n > \alpha \mid f_0 \right) &= \alpha P \left( \tau < \infty \mid f_0 \right) \leq E \left( M_\tau 1_{\{\tau < \infty\}} \mid f_0 \right) \\ &\leq E \left( M_\infty 1_{\{\tau < \infty\}} \mid f_0 \right) = E \left( M_\infty 1_{\{\sup_{n \in \mathbb{N}} M_n > \alpha\}} \mid f_0 \right) \text{ f.s.} \end{aligned}$$

Sei  $P(x, y)$  eine reguläre Version der bedingten Verteilung

$P(M_\infty \leq x, \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n \leq y \mid f_0)$  und  $P_2(y)$  die Randverteilung

$$P \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n \leq y \mid f_0 \right) = P(\infty, y).$$

$$\Omega_1 := \{ \omega \mid q(1 - P_2(q)(\omega)) \leq \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot 1_{]q, \infty[}(y) dP(x, y)(\omega) \forall q \in \mathbb{Q} \}.$$

dann ist  $P \Omega_1 = 1$  aufgrund der obigen Ungleichung.

$\omega \in \Omega_1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}$  mit  $q_n \downarrow \alpha$ , dann gilt:

$$\alpha(1 - P_2(\alpha)(\omega)) = \lim_n q_n(1 - P_2(q_n)(\omega)) \text{ und } 1_{] \alpha, \infty[}(y) = \lim_n 1_{] q_n, \infty[}(y) \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_n \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot 1_{] q_n, \infty[}(y) dP(x, y)(\omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot 1_{] \alpha, \infty[}(y) dP(x, y)(\omega).$$

$$\text{Also: } \alpha(1 - P_2(\alpha)(\omega)) \leq \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot 1_{] \alpha, \infty[}(y) dP(x, y)(\omega) \forall \omega \in \Omega_1, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a^2 dP_2(a)(\omega) &= 2 \int_0^\infty a (1-P_2(a)(\omega)) da \leq \\ &\leq 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} x \mathbf{1}_{[a, \infty[}(y) dP(x,y)(\omega) da = \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} x \int_0^\infty \mathbf{1}_{[-\infty, y]}(a) da dP(x,y)(\omega) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} x y dP(x,y)(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_1 \\ \Rightarrow E \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n^2 \mid f_0 \right) &\leq 2 E \left( M_\infty \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n \mid f_0 \right) \text{ f.s.} \end{aligned}$$

$$E \left( M_\infty \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n \mid f_0 \right) = E \left( M_\infty^2 \mid f_0 \right) \quad E \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n^2 \mid f_0 \right) \text{ f.s.} \leq$$

Nach dem Lemma von Fatou gilt:  $E \left( M_\infty^2 \mid f_0 \right) = E \left( \lim_n M_n^2 \mid f_0 \right) =$

$$E \left( \lim_n M_n^2 \mid f_0 \right) \leq \lim_n E \left( M_n^2 \mid f_0 \right) \leq \sup_n E \left( M_n^2 \mid f_0 \right), \text{ also gilt:}$$

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} E \left( M_n^2 \mid f_0 \right) &\leq E \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n^2 \mid f_0 \right) \leq 4 E \left( M_\infty^2 \mid f_0 \right) \\ &\leq 4 \sup_{n \in \mathbb{N}} E \left( M_n^2 \mid f_0 \right) \end{aligned}$$

Das nächste Lemma steht (ähnlich) bei [33] im Beweis zu Korollar 3.8. Die eigentliche Aussage ist, daß es bei der Martingal-Version des zentralen Grenzwertsatzes unter schwachen Bedingungen äquivalent ist, ob man durch die Summe der Quadrate oder die bedingten Varianzen normiert.

### A 3. Lemma

$(X_{n,j}, f_{n,j})_{n,j}$  ein Dreiecksschema,  $X_{n,j}$  sei  $f_{n,j}$ -beßbar  $v_{n,j}, k_n$  eine  $(f_{n,j})_j$  Stoppzeit,  $f_{n,0} \subseteq f_{n,1} \subseteq \dots$ ; es gelte

(i)  $\sum_{j=1}^k E(X_{n,j}^2 \mid f_{n,j-1}) \rightarrow 0$  n.W. oder

(ii)  $\sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| \mathbf{1}_{|X_{n,j}| > \epsilon} \mid f_{n,j-1}) \rightarrow 0$  n.W.  $\forall \epsilon$  und

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| \mid f_{n,j-1}) > R \right) = 0, \text{ dann folgt}$$

$$\sum_{j=1}^k X_{n,j} - \sum_{j=1}^k E(X_{n,j} | f_{n,j-1}) \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

Beweis: Sei i) vorausgesetzt:

Es gibt eine Nullfolge  $(\delta_n)_n$  mit

$$P \left( \sum_{j=1}^k E(X_{n,j}^2 | f_{n,j-1}) \geq \delta_n \right) \rightarrow 0$$

$$\text{Sei } A_{n,j} := \left\{ \sum_{j=1}^j E(X_{n,i}^2 | f_{n,i-1}) \leq \delta_n \right\}, \quad X'_{n,j} := X_{n,j} 1_{A_{n,j}}$$

$$E \left( \sum_{j=1}^k (X'_{n,j} - E(X'_{n,j} | f_{n,j-1}))^2 \right) = E \sum_{j=1}^k (X'_{n,j} - E(X'_{n,j} | f_{n,j-1}))^2$$

$$E \sum_{j=1}^k (E(X_{n,j}^2 | f_{n,j-1}) - E^2(X'_{n,j} | f_{n,j-1})) \leq$$

$$\leq E \sum_{j=1}^k (E(X'_{n,j} | f_{n,j-1}) =$$

$$= E \sum_{j=1}^k 1_{A_{n,j}} E(X_{n,j}^2 | f_{n,j-1}) \leq \delta_n \rightarrow 0$$

$$P \left( \sum_{j=1}^k X_{n,j} \neq \sum_{j=1}^k X'_{n,j} \right) \leq P \left( \sum_{i=1}^k E(X_{n,i-1}^2 | f_{n,i-1}) > \delta_n \right) \rightarrow 0$$

$$\text{Da } \sum_{j=1}^k E(X'_{n,j} | f_{n,j-1}) = \sum_{j=1}^k 1_{A_{n,j}} E(X_{n,j} | f_{n,j-1}) \text{ ist, folgt:}$$

$$P \left( \sum_{j=1}^k E(X_{n,j} | f_{n,j-1}) \neq \sum_{j=1}^k E(X'_{n,j} | f_{n,j-1}) \right) \leq$$

$$\leq P \left( \sum_{i=1}^k E(X_{n,i}^2 | f_{n,i-1}) > \delta_n \right) \rightarrow 0, \text{ damit gilt die Behauptung.}$$

Sei ii) vorausgesetzt:

Es gibt Folgen  $(\epsilon_n)_n, (R_n)_n$  mit  $\epsilon_n \downarrow 0, R_n \nearrow \infty, \epsilon_n \cdot R_n \downarrow 0$

$$\text{und } P \left( \sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| | 1_{|X_{n,j}| > \epsilon_n} | f_{n,j}) > \epsilon_n^2 \right) \rightarrow 0.$$

$$\text{Da } R_n \nearrow \infty, \text{ ist } \lim_n P \left( \sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| | f_{n,j-1}) > R_n \right) \leq$$

$$\leq \lim_n P \left( \sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| | f_{n,j-1}) > R_n \right) \forall R, \text{ also}$$

$$\overline{\lim}_n P \left( \sum_{j=1}^k E \left( |X_{n,j}| \mid f_{n,j-1} \right) > R_n \right) = 0$$

$$\text{Sei } A_{n,j} := \left\{ \sum_{i=1}^j E \left( |X_{n,i}| \mid f_{n,i-1} \right) \leq R_n \right\}, \quad X'_{n,j} := \\ := X_{n,j} \cdot 1_{|X_{n,j}| \leq \epsilon_n} \cdot 1_{A_{n,j}}, \text{ dann ist}$$

$$E \left( \sum_{j=1}^k (X'_{n,j} - E(X'_{n,j} \mid f_{n,j-1}))^2 \right) \leq E \sum_{j=1}^k E(X_{n,j}^2 \mid f_{n,j-1}) \leq$$

$$\leq \epsilon_n E \sum_{j=1}^k E(|X'_{n,j}| \mid f_{n,j-1}) \leq E \sum_{j=1}^k 1_{A_{n,j}} E(|X_{n,j}| \mid f_{n,j-1}) \leq \epsilon_n \cdot R_n \rightarrow 0$$

$$P \left( \sum_{j=1}^k X_{n,j} \neq \sum_{j=1}^k X'_{n,j} \right) \leq$$

$$\leq P \left( \max_{j=1}^k |X_{n,j}| > \epsilon_n \right) + P \left( \sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| \mid f_{n,j-1}) > R_n \right) \leq$$

$$\leq \epsilon_n + P \left( \sum_{j=1}^k P(|X_{n,j}| > \epsilon_n \mid f_{n,j-1}) > \epsilon_n \right) +$$

$$+ P \left( \sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| \mid f_{n,j-1}) > R_n \right) \leq$$

$$\leq \epsilon_n + P \left( \sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| \cdot 1_{|X_{n,j}| > \epsilon_n} \mid f_{n,j-1}) > \epsilon_n^2 + \right.$$

$$\left. + P \left( \sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| \mid f_{n,j-1}) > R_n \right) \right) + 0$$

Bei der vorletzten Ungleichung wurde Lemma 3.5 in [24] und bei der letzten die Chebychev-Ungleichung verwendet.

$$\text{Es ist } E(X'_{n,j} \mid f_{n,j-1}) = 1_{A_{n,j}} E(X_{n,j} \mid f_{n,j-1}) -$$

$$- 1_{A_{n,j}} E(X_{n,j} \cdot 1_{|X_{n,j}| > \epsilon_n} \mid f_{n,j-1})$$

$$\text{also } \left| \sum_{j=1}^k E(X_{n,j} \mid f_{n,j-1}) - \sum_{j=1}^k E(X'_{n,j} \mid f_{n,j-1}) \right| \leq$$



$$\leq \left| \sum_{j=1}^k (1 - 1_{A_{n,j}}) E(X_{n,j} \mid f_{n,j-1}) \right| + \sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| \mid 1_{|X_{n,j}| > \epsilon_n} \mid f_{n,j-1}),$$

$$\text{und damit } P\left(\left| \sum_{j=1}^k E(X_{n,j} \mid f_{n,j-1}) - \sum_{j=1}^k E(X'_{n,j-1} \mid f_{n,j-1}) \right| > \epsilon\right) \leq$$

$$\leq P\left(\sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| \mid f_{n,j-1}) > R_n\right) +$$

$$+ P\left(\sum_{j=1}^k E(|X_{n,j}| \mid 1_{|X_{n,j}| > \epsilon_n} \mid f_{n,j-1}) > \epsilon\right) \rightarrow 0$$

damit gilt die Behauptung.

#### A 4. Folgerung

$(X_{n,j}, f_{n,j})_{n,j}$  ein Dreiecksschema,  $X_{n,j}$   $f_{n,j}$ -meßbar  $\forall n, j$

$\max\{|X_{n,j}| \mid j = 1, \dots, k_n\} \leq \delta_n \rightarrow 0$ ;  $f_{n,0} \stackrel{c}{=} f_{n,1} \stackrel{c}{=} f_{n,2} \stackrel{c}{=} \dots$ ;

$f_0 := \bigcap_{n \geq 1} f_{n,0}$ ;  $k_n$  sei eine  $(f_{n,j})_j$  Stoppzeit; es gebe ein  $f$ -meßbares

$X_0$  mit  $\sum_{j=1}^k X_{n,j} \rightarrow X_0$  n.W.,  $\sum_{j=1}^k X_{n,j}^2 \rightarrow 0$  n.W., dann folgt:

$$\sum_{j=1}^k E(X_{n,j} \mid f_{n,j-1}) \rightarrow X_0 \text{ n.W.}$$

#### Beweis:

Es gibt eine Nullfolge  $(\epsilon_n)_n$  mit  $P\left(\sum_{j=1}^k X_{n,j}^2 > \epsilon_n\right) < \epsilon_n \quad \forall n$ ;

$$A_{n,j} := \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} X_{n,i}^2 \leq \epsilon_n \right\} \leq \left\{ \sum_{i=1}^j X_{n,i}^2 \leq \epsilon_n + \delta_n^2 \right\} =: B_{n,j}$$

$$X'_{n,j} := X_{n,j} 1_{A_{n,j}}; \text{ zunächst ist } P\left(\sum_{i=1}^k X_{n,i} \neq \sum_{i=1}^k X'_{n,i}\right) \leq$$

$$\leq P\left(\sum_{i=1}^k X_{n,i}^2 > \epsilon_n\right) < \epsilon_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^k X'_{n,j} \rightarrow X_0 \text{ n.W.}$$

$$P\left(\sum_{j=1}^k E(X_{n,j}^2 \mid f_{n,j}) > \epsilon \mid f_0\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon} E\left(\sum_{j=1}^k E(X_{n,j}^2 \mid f_{n,j}) \mid f_0\right) = \frac{1}{\epsilon} E\left(\sum_{j=1}^k X_{n,j}^2 \mid f_0\right) =$$

$$= \frac{1}{\epsilon} E \left( \sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}^2 1_{A_{n,j}} \mid f_0 \right) \leq \frac{1}{\epsilon} E \left( \sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}^2 1_{B_{n,j}} \mid f \right) \leq \frac{\epsilon_n + \delta_n^2}{\epsilon} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k_n} E ( X_{n,j}^2 \mid f_0 ) \rightarrow 0 \text{ n.W. ; mit Lemma A.3}$$

$$\text{folgt } \sum_{j=1}^{k_n} E ( X_{n,j}' \mid f_0 ) \rightarrow X_0 \text{ n.W. ;}$$

$$A_{n,j} \in f_{n,j-1} \Rightarrow E ( X_{n,j}' \mid f_{n,j-1} ) = 1_{A_{n,j}} E ( X_{n,j} \mid f_{n,j-1} ) \Rightarrow$$

$$P \left( \sum_{j=1}^{k_n} E ( X_{n,j}' \mid f_0 ) \neq \sum_{j=1}^{k_n} E ( X_{n,j} \mid f_0 ) \right) \leq$$

$$\leq P \left( \sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}^2 > \epsilon_n \right) < \epsilon_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k_n} E ( X_{n,j} \mid f_0 ) \rightarrow X_0 \text{ n.W.}$$

Der nächste Satz steht in etwas schwächerer Form bei [17]. Die Aussage ist, daß sich die Verteilung einer Summe Martingaldifferenzen asymptotisch verhält wie eine Summe unabhängiger Zufallsvariabler.

#### A 5. Satz

$k_n$  sei eine  $(f_{n,j})_j$  Stoppzeit;  $Y_{n,j}$   $f_{n,j}$ -meßbare Zufallsvariable  $W_{n,j}$  :  
 $Z$  eine  $f_0$ -meßbare Zufallsvariable mit  $|Z| > 0$  f.s.; Dann gilt:

$$\prod_{j=1}^{k_n} E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}} \rightarrow Z \text{ f.s.} \Rightarrow E \left( \prod_{j=1}^{k_n} e^{iY_{n,j}} \mid f_0 \right) \rightarrow Z \text{ f.s.}$$

#### Beweis:

Der Beweis verläuft ähnlich wie in [17], Lemma 1 für Konstante  $Z \in \mathbb{C}$ .

Man zeigt zuerst, daß man die Behauptung nur für beschränkte  $k_n$  (d.h.

es gibt  $a_n \in \mathbb{R}$  mit  $P(k_n \leq a_n) = 1$ ) zu beweisen braucht: Ist  $k_n$

nicht beschränkt, dann gibt es eine Folge  $a_n$  mit  $P(k_n > a_n) \leq 2^{-n}$ .

Definiere  $k_n^* := \min \{ k_n, a_n \}$ , dann folgt mit Borel-Cantelli:

$$P(k_n \neq k_n^* \text{ unendlich oft}) = 0,$$

$$\prod_{j=1}^k E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}} + Z \text{ f.s. } \Rightarrow \prod_{j=1}^{k^*} E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}} + Z \text{ f.s. } \quad \text{und}$$

$$E \left( \prod_{j=1}^{k^*} e^{iY_{n,j}} \mid f_0 \right) + Z \text{ f.s. } \Rightarrow E \left( \prod_{j=1}^k e^{iY_{n,j}} \mid f_0 \right) + Z \text{ f.s. }$$

Ist die Aussage für beschränkte Stoppzeiten bewiesen, dann gilt sie für

$k_n^*$  und damit auch für  $k_n$ . Sei also o.E.  $P(k_n \leq a_n) = 1$ .

Wegen  $|Z| > 0$  f.s. gibt es eine Folge  $\varepsilon_n \searrow 0$  in  $\mathbb{R}$  mit  $P(|Z| \geq 2\varepsilon_n) < 2^{-n}$ .

$$\text{Sei } A_{n,j} := \left\{ \left| \prod_{e=1}^j E_{n,e-1} e^{iY_{n,e}} \right| \geq \frac{|Z|}{2} \geq \varepsilon_n \right\} \in \mathcal{F}_{n,j-1};$$

$$A_{n,1} \quad A_{n,2} \quad \dots; \quad \text{Sei } Y'_{n,j} := Y_{n,j} 1_{A_{n,j}};$$

$$\text{dann ist } E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}} = 1_{A_{n,j}} E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}} + 1_{A_{n,j}^c} \quad \text{und}$$

$$(+)\left| \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}} \right| \geq \max \left\{ \frac{|Z|}{2}, \varepsilon_n \right\} \text{ f.s.}; \quad \text{auch sieht man sofort,}$$

$$\text{daß } |Z| \leq 1 \text{ f.s. wegen } 1 \geq \left| \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}} \right| \text{ f.s., also } E|Z| < \infty.$$

$$E \left( \prod_{j=1}^k e^{iY'_{n,j}} \frac{1}{E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}}} \mid f_0 \right) =$$

$$E \left( \prod_{j=1}^{a_n} (1_{\{k_n \geq j\}} e^{iY'_{n,j}} \frac{1}{E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}}} + 1_{\{k_n < j\}}) \mid f_0 \right) =$$

$$E \left( \prod_{j=1}^{a_n-1} (1_{\{k_n \geq j\}} e^{iY'_{n,j}} \frac{1}{E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}}} + 1_{\{k_n < j\}}) (1_{\{k_n \leq a_n\}} \right.$$

$$\cdot E \left( e^{iY'_{n,a_n}} \frac{1}{E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}}} \mid f_{n,a_n-1} \right) 1_{\{k_n > a_n\}} \mid f_0 \right)$$

$$E \left( \prod_{j=1}^{a_n-1} (1_{\{k_n \geq j\}} e^{iY'_{n,j}} \frac{1}{E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}}} + 1_{\{k_n < j\}}) \mid f_0 \right) = \dots = 1 \text{ f.s.}$$

$$\prod_{j=1}^k E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}} + Z \text{ f.s. } \Rightarrow \prod_{j=1}^k 1_{A_{n,j}} + 1 \text{ f.s. } \Rightarrow$$

Es gibt ein  $n_0 = n_0(\omega)$ , so daß  $1_{A_{n,j}}(\omega) = 1 \forall j; n \geq n_0(\omega)$  f.f.a.ω

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k_n(\omega)} (Y_{n,j} - Y'_{n,j})(\omega) = 0 \forall n \geq n_0(\omega) \text{ und}$$

$$\begin{aligned} k_n(\omega) \prod_{j=1} E(e^{iY'_{n,j}} | f_{n,j-1})(\omega) &= \prod_{j=1}^{k_n(\omega)} (1_{A_{n,j}}(\omega) E(e^{iY_{n,j}} | f_{n,j-1})(\omega) + \\ &+ 1_{A_{n,j}^c}(\omega)) = \end{aligned}$$

$$k_n(\omega) \prod_{j=1} E(e^{iY'_{n,j}} | f_{n,j-1})(\omega) \quad \forall n \geq n_0(\omega) \text{ f.f.a.}\omega, \text{ also gilt:}$$

$$(++) \quad \sum_{j=1}^{k_n} (Y_{n,j} - Y'_{n,j}) \rightarrow 0 \text{ f.s. und } \prod_{j=1}^{k_n} E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}} \rightarrow Z \text{ f.s.}$$

$$(+++ ) \quad E\left(\prod_{j=1}^{k_n} e^{iY'_{n,j}} \mid f_0\right) - Z =$$

$$= E\left(\prod_{j=1}^{k_n} e^{iY'_{n,j}} \mid f_0\right) - Z E\left(\prod_{j=1}^{k_n} e^{iY'_{n,j}} \prod_{j=1}^{k_n} \frac{1}{E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}}} \mid f_0\right) =$$

$$= E\left(\prod_{j=1}^{k_n} e^{iY'_{n,j}} \prod_{j=1}^{k_n} \frac{1}{E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}}} \left(\prod_{j=1}^{k_n} E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}} - Z\right)\right) =$$

$$\text{denn} \quad \left| \left(\prod_{j=1}^{k_n} e^{iY'_{n,j}} \prod_{j=1}^{k_n} \frac{1}{E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}}} \left(\prod_{j=1}^{k_n} E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}} - Z\right)\right) \right| \leq \quad (+)$$

$$\leq \frac{2}{|Z|} \left| \prod_{j=1}^{k_n} E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}} - Z \right| \rightarrow 0 \text{ f.s. mit } (++) \text{ und andererseits}$$

$$\left| \left(\prod_{j=1}^{k_n} e^{iY'_{n,j}} \prod_{j=1}^{k_n} \frac{1}{E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}}} \left(\prod_{j=1}^{k_n} E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}} - Z\right)\right) \right| \leq$$

$$\leq 1 + \frac{|Z|}{\left|\prod_{j=1}^{k_n} E_{n,j-1} e^{iY'_{n,j}}\right|} \leq 3 \text{ f.s. . Damit folgt aber nun:}$$

$$\left| E\left(\prod_{j=1}^{k_n} e^{iY'_{n,j}} \mid f_0\right) - Z \right| \leq \left| E\left(\prod_{j=1}^{k_n} e^{iY'_{n,j}} \mid f_0\right) - Z \right| +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| E \left( \prod_{j=1}^k e^{iY_{n,j}} - \prod_{j=1}^k e^{iY'_{n,j}} \mid f_0 \right) \right| \\
 & \leq \left| E \left( \prod_{j=1}^k e^{iY'_{n,j}} \mid f_0 \right) - Z \right| + E \left( \left| \prod_{j=1}^k e^{i(Y_{n,j} - Y'_{n,j})} - 1 \right| \mid f_0 \right) + 0 \text{ f.s.} \\
 & \text{wegen (++) , (+++ ) und } \left| \prod_{j=1}^k e^{i(Y_{n,j} - Y'_{n,j})} - 1 \right| \leq 2.
 \end{aligned}$$

#### A 6. Folgerung

$k_n$  eine endliche  $(f_{n,j})_j$  Stoppzeit; die Zufallsvariablen  $Y_{n,j}$  seien  $f_{n,j}$ -meßbar  $\forall n, j$ ;  $Z$  eine  $f_0$ -meßbare Zufallsvariable mit  $|Z| > 0$  f.s., dann gilt:

$$\prod_{j=1}^{k_n} E_{n,j-1} e^{iY_{n,j}} \rightarrow Z \text{ n.W.} \Rightarrow E \left( \prod_{j=1}^{k_n} e^{iY_{n,j}} \mid f_0 \right) \rightarrow Z \text{ n.W.}$$

#### Beweis:

Sei  $(n_1) \subset (n)$ ; Es gibt eine Teilfolge  $(n_2) \subset (n_1)$  mit

$$\prod_{j=1}^{k_{n_2}} E_{n_2,j-1} e^{iY_{n_2,j}} \rightarrow Z \text{ f.s.} \Rightarrow$$

$$E \left( \prod_{j=1}^{k_{n_2}} e^{iY_{n_2,j}} \mid f_0 \right) \rightarrow Z \text{ f.s.} \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

Das nächste Lemma ist nur eine Übersetzung von Satz 5 auf den allgemeineren Fall, insbesondere auf die Algebra der quadratischen, reellen Matrizen.

#### A 7. Lemma

$B$  eine separable Banach-Algebra mit Eins  $(\Omega, f, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(Z_{n,j}, f_{n,j})_{n,j}$  ein Dreiecksschema von  $B$ -wertigen Zufallsvariablen mit  $Z_{n,j}$   $f_{n,j}$ -meßbar  $\forall n, j$ .  $f_0 := \bigcap_{n \geq 1} f_{n,0}$ ;  $f_{n,1} \subset f_{n,2} \subset \dots \forall n$ ;  $k_n$

eine  $N_0$ -wertige, f.s. endliche Stoppzeit bzgl.  $(f_{n,j})_j$ , es gelte

$$\text{i) } \left\| \prod_{j=i_1}^{i_m} Z_{n,j} \right\| \leq C_1 \text{ f.s. } \forall i_1, \dots, i_m \leq k_n, C_1 \text{ } f_0\text{-meßbar}$$

$$\text{ii) } \max_{j=1}^{k_n} \| E_{n,j-1} Z_{n,j} - I \| \rightarrow 0 \text{ n.W.}$$

$$\text{iii) } \sup_n \sum_{j=1}^{k_n} \| E_{n,j-1} Z_{n,j} - I \| \leq C_2 \text{ f.s. , } C_2 \text{ } f_0\text{-meßbar}$$

$$\text{iv) } Z_0 \text{ ist } f_0\text{-meßbar mit } \prod_{j=1}^{k_n} E_{n,j-1} Z_{n,j} \rightarrow Z_0 \text{ n.W.}$$

$$\text{dann folgt: } E \left( \prod_{j=1}^{k_n} Z_{n,j} \mid f_0 \right) \rightarrow Z_0 \text{ n.W.}$$

Beweis:

In vollständigen, separablen, metrischen Räumen konvergiert  $X_n \rightarrow X$  n.W., falls jede Teilfolge  $(n') \subset (n)$  eine Teilfolge  $(n'') \subset (n')$  enthält mit  $X_{n''} \rightarrow X$  f.s.

Damit wäre das Lemma bewiesen, wenn man die f.s. Konvergenz in der Aussage unter der Voraussetzung der f.s. Konvergenz in ii) und iv) zeigt.

Man setzt nun:

$$A_{n,j} := \{ \| E_{n,j-1} - I \| \leq \frac{1}{2} \}$$

$$Y_{n,j} := Z_{n,j} 1_{A_{n,j}} + I (1 - 1_{A_{n,j}})$$

Dann ist  $E_{n,j-1} Y_{n,j} = (E_{n,j-1} Z_{n,j}) 1_{A_{n,j}} + I (1 - 1_{A_{n,j}})$  und

$$E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} := (E_{n,j-1} Y_{n,j})^{-1} = (E_{n,j-1} Z_{n,j})^{-1} 1_{A_{n,j}} + I (1 - 1_{A_{n,j}})$$

$$E \left( \prod_{j=1}^k Y_{n,j} \mid \prod_{j=k}^{k-1} E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} \mid f_0 \right) =$$

$$= E \left( \prod_{j=1}^{k-1} Y_{n,j} E_{n,k-1} Y_{n,k} \mid \prod_{j=k}^{k-1} E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} \mid f_0 \right) =$$

$$= E \left( \prod_{j=1}^{k-1} Y_{n,j} \mid \prod_{j=k-1}^{k-1} E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} \mid f_0 \right) = \dots = I$$

$$\text{Daraus folgt: } E \left( \prod_{j=1}^{k_n} Y_{n,j} \mid \prod_{j=k_n}^{k_n} E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} \mid f_0 \right) = \dots = I$$

$$\begin{aligned} \text{Damit: } E \left( \prod_{j=1}^k Y_{n,j} \mid f_0 \right) - Z_0 &= E \left( \prod_{j=1}^k Y_{n,j} \mid f_0 \right) - I \cdot Z_0 = \\ &= E \left( \prod_{j=1}^k Y_{n,j} \prod_{j=k}^1 E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} \left\{ \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Y_{n,j} - Z_0 \right\} \mid f_0 \right) \end{aligned}$$

Zunächst ist wegen i)

$$\left\| \prod_{j=1}^k Y_{n,j} \right\| = \left\| \prod_{j=1}^k Z_{n,j} 1_{A_{n,j}} \right\| \leq C_1 \quad \text{f.s.}$$

$$E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} = I + 1_{A_{n,j}} (E_{n,j-1}^{-1} Z_{n,j} - I) \Rightarrow$$

$$\prod_{j=k_n}^1 E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} - I = \prod_{j=k_n}^1 (I + 1_{A_{n,j}} (E_{n,j-1}^{-1} Z_{n,j} - I)) - I =$$

$$= \sum_{j=k_n}^1 \overbrace{k_n \geq i_j > \dots > i_1 \geq 1} 1_{A_{n,i_j}} (E_{n,i_j-1}^{-1} Z_{n,i_j} - I) \dots 1_{A_{n,i_1}} (E_{n,i_1-1}^{-1} Z_{n,i_1} - I)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \prod_{j=k_n}^1 E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} - I \right\| &\leq \sum_{l=1}^1 \frac{1}{l!} \left( \sum_{j=1}^1 1_{A_{n,j}} \left\| E_{n,j-1}^{-1} Z_{n,j} - I \right\| \right)^l \\ &\leq \exp \left\{ 2 \sum_{j=1}^k 1_{A_{n,j}} \left\| E_{n,j-1}^{-1} Z_{n,j} - I \right\| \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \exp \left\{ 4 \sum_{j=1}^k 1_{A_{n,j}} \left\| E_{n,j-1} Z_{n,j} - I \right\| \right\} \leq \exp \{ 4 \cdot C_2 \}$$

$$\text{wegen } 1_{A_{n,j}} \left\| E_{n,j-1}^{-1} Z_{n,j} \right\| = 1_{A_{n,j}} \left\| (I + (E_{n,j-1} Z_{n,j} - I))^{-1} \right\| \leq 2$$

$$\text{also ist } \left\| \prod_{j=k_n}^1 E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} \right\| \leq 1 + \exp \{ 4 C_2 \}$$

$$\text{Ebenso zeigt man: } \left\| \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Y_{n,j} \right\| \leq 1 + \exp \{ 2 C_2 \}.$$

Damit hat man:

$$\left\| \prod_{j=1}^k Y_{n,j} \prod_{j=k_n}^1 E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} \left\{ \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Y_{n,j} - Z_0 \right\} \right\| \leq$$

$$\leq C_1 \cdot (1 + \exp \{ 4 C_2 \}) (1 + \exp \{ 2 C_2 \} + \| Z_0 \|) \quad \text{f.s.}$$

und die rechte Seite ist  $f_0$ -meßbar ; andererseits

$$\left\| \prod_{j=1}^k Y_{n,j} \prod_{j=k_n}^n E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} \left\{ \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Y_{n,j} - Z_0 \right\} \right\| \leq \\ \leq C_1 (1 + \exp \{ 4 C_2 \}) \left\| \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Y_{n,j} - Z_0 \right\| \rightarrow 0 \text{ f.s.,}$$

denn da ii) f.s. gelten soll, gibt es ein  $n_0 = n_0(\omega)$ , so daß

$$\prod_{j=1}^k 1_{A_{n,j}} = 1 \quad \forall n \geq n_0, \text{ also}$$

$$\prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Y_{n,j} = \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Z_{n,j} \quad \forall n \geq n_0,$$

da ebenso iv) f.s. gilt, folgt die obige Konvergenz. Daraus folgt aber nun:

$$E \left( \prod_{j=1}^k Y_{n,j} \mid f_0 \right) - Z_0 = \\ = E \left( \prod_{j=1}^k Y_{n,j} \prod_{j=k_n}^n E_{n,j-1}^{-1} Y_{n,j} \left\{ \prod_{j=1}^k E_{n,j-1} Y_{n,j} - Z_0 \right\} \mid f_0 \right) \rightarrow 0 \text{ f.s.}$$

$$\text{Wegen } \left\| \prod_{j=1}^k Y_{n,j} - \prod_{j=1}^k Z_{n,j} \right\| \leq 2 C_1 \text{ } f_0\text{-meßbar}$$

$$\text{und } \frac{1}{\prod_{j=1}^k Y_{n,j} \neq \prod_{j=1}^k Z_{n,j}} \leq \prod_{j=1}^k (1 - 1_{A_{n,j}}) = 0 \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{gilt: } E \left( \prod_{j=1}^k Y_{n,j} - \prod_{j=1}^k Z_{n,j} \mid f_0 \right) \rightarrow 0 \text{ f.s.}$$

Damit gilt das Lemma.

Oft benutzt wird die folgende Aussage über die gleichmäßige Konvergenz.

#### A 8. Satz

a)  $(B, \|\cdot\|)$  ein endlichdimensionaler Banachraum,

$$\sup \{ \|X_n(0)\| \mid n \geq 1 \} < \infty \quad \text{und}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{ \|X_n(s) - X_n(t)\| \mid |t-s| \leq \delta; s, t \leq 1 \} = 0,$$



dann gibt es zu jeder Teilfolge  $(X_n)_n \subset (X_n)_n$  eine Teilfolge

$(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (X_n)_n$ , und ein stetiges  $X$  mit

$$\sup \{ \|X_n(t) - X(t)\| \mid t \leq 1 \} \rightarrow 0$$

b)  $B = |\mathbb{R}, X_n(\cdot)|$  nichtfallend für jedes  $n$ ,  $X(\cdot)$  stetig mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n(t) - X_n(s)) \leq X(t) - X(s) \text{ für alle } 0 \leq s \leq t \leq 1, \text{ dann}$$

$$\text{ist } \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup \{ |X_n(s) - X_n(t)| \mid |t-s| \leq \delta; s, t \leq 1 \} = 0$$

Beweis:

a) Man zeigt mit [2] Satz 14.3, daß  $(X_n)_n$  relativ kompakt in  $D$  ist.

Sei  $w_X(\delta) := \sup \{ \|X(s) - X(t)\| \mid |s-t| \leq \delta; s, t \leq 1 \}$ , dann

$$\text{gilt nach Voraussetzung } \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w_{X_n}(\delta) = 0.$$

Für  $\delta < \frac{1}{2}$  kann man das Intervall  $[0,1]$  in Teilintervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  zerlegen

mit  $\delta < t_{i+1} - t_i \leq 2\delta \quad \forall i$ , also ist  $w_X(\delta) \leq w_X(2\delta)$ .

$$\text{Damit ist } \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w_{X_n}(\delta) = 0, \text{ d.h. } \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta, n_0} \bigwedge_{n \geq n_0} w_{X_n}(\delta) \leq \epsilon.$$

Für  $n = 1, \dots, n_0 - 1$  gibt es ein  $\delta_1 < \delta$  mit  $w_{X_n}(\delta_1) \leq \epsilon$ , da außerdem für

$X \in D$ ,  $\delta_1 < \delta$  auch  $w_X(\delta_1) \leq w_X(\delta)$  ist, gilt  $w_{X_n}(\delta_1) \leq \epsilon \quad \forall n \geq 1$  und damit

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{ w_{X_n}(\delta) \mid n \geq 1 \} = 0$$

Da  $B$  ein endlichdimensionaler Banachraum ist, muß für die Anwendung von [2]

Satz 14.3 nur noch  $\sup \{ \|X_n(t)\| \mid n \geq 1, t \leq 1 \} < \infty$  gezeigt werden.

Nach Voraussetzung gibt es ein  $\delta$  und ein  $n_0$  mit  $w_{X_n}(\delta) \leq 1 \quad \forall n \geq n_0$ . Sei

$K > \frac{1}{\delta}$  und  $t_i := \frac{i}{K}$ ,  $i = 0, \dots, K$ ; dann ist jedes  $t \in ]0,1]$  aus einem

$$]t_r, t_{r+1}], \text{ also } \|X_n(t) - X_n(0)\| \leq \sum_{i=1}^{r-1} \|X_n(t_{i+1}) - X_n(t_i)\| + \|X_n(t) - X_n(t_r)\|$$

$$\leq r + 1 \leq K + 1, \text{ also ist } \sup \{ \|X_n(t)\| \mid n \geq n_0, t \leq 1 \} < \infty.$$

Nach Hilfssatz A.9 ist  $t \mapsto \|X_n(t)\|$  stetig für jedes  $n$ , also ist

$\sup \{ \|X_n(t)\| \mid n < n_0, t \in [0, 1] \} < \infty$  und damit  $(X_n)_n$  relativ kompakt.

Damit gibt es zu jeder Teilfolge  $(X_{n'})_n \subset (X_n)_n$  eine Teilfolge

$(X_{n''})_n \subset (X_{n'})_n$ , und ein  $X \in D$  mit  $r_0(X_{n''}, X) \rightarrow 0$ , also auch  $r(X_{n''}, X) \rightarrow 0$ .

Es gibt also eine Folge  $(\lambda_{n''})_n$  von Transformationen mit

$\sup \{ \|\lambda_{n''}(t) - t\| \mid t \in [0, 1] \} \rightarrow 0$  und

$\sup \{ \|X_{n''}(\lambda_{n''}(t)) - X(t)\| \mid t \in [0, 1] \} \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \|X(s) - X(t)\| &\leq \|X(s) - X_{n''}(\lambda_{n''}(s))\| + \\ &\quad + \|X_{n''}(\lambda_{n''}(s)) - X_{n''}(s)\| + \|X_{n''}(s) - X_{n''}(t)\| + \\ &\quad + \|X_{n''}(t) - X_{n''}(\lambda_{n''}(t))\| + \|X_{n''}(\lambda_{n''}(t)) - X(t)\| \leq \\ &\leq 2 \sup \{ \|X(t) - X_{n''}(\lambda_{n''}(t))\| \mid t \in [0, 1] \} + \\ &+ 2 w_{X_{n''}}(\sup \{ \|\lambda_{n''}(s) - s\| \mid s \in [0, 1] \}) + w_{X_{n''}}(\|t - s\|) \end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung folgt damit, daß  $X$  stetig ist.

$$\begin{aligned} \|X_{n''}(t) - X(t)\| &\leq \|X_{n''}(t) - X_{n''}(\lambda_{n''}(t))\| + \\ &\quad + \|X_{n''}(\lambda_{n''}(t)) - X(t)\|, \text{ also} \\ \sup \{ \|X_{n''}(t) - X(t)\| \mid t \in [0, 1] \} &\leq w_{X_{n''}}(\sup \{ \|\lambda_{n''}(t) - t\| \mid t \in [0, 1] \}) + \\ &+ \sup \{ \|X_{n''}(\lambda_{n''}(t)) - X(t)\| \mid t \in [0, 1] \} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

b) Da  $X$  stetig und nichtfallend ist, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung.

$0 = t_0 < \dots < t_r = 1$  mit  $X(t_{i+1}) - X(t_i) \leq \varepsilon \quad \forall i$ .

Sei  $\delta_1 := \max_i (t_{i+1} - t_i)$  und  $\delta < \delta_1$ , dann gibt es zu  $s \leq t$  mit  $t - s \leq \delta$

ein  $l$  mit  $t_1 \leq s \leq t < t_{l+2}$ , also  $X_n(t) - X_n(s) \leq X_n(t_{l+2}) - X_n(t_1)$  und damit  $\overline{\lim}_n \sup \{ |X_n(t) - X_n(s)| \mid |t-s| \leq \delta \} \leq$

$$\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_i (X_n(t_{i+1}) - X_n(t_i)) \leq \max_i (X(t_{i+2}) - X(t_1)) \leq 2\varepsilon$$

Wie im Reellen beweist man :

A 9. Satz

Ist  $(X, d)$  ein vollständiger, separabler, metrischer Raum und  $D = \{ X : [0,1] \rightarrow X \mid X \text{ cadlag} \}$  mit der Skorohod-Metrik, dann ist für  $X_0 \in X$  die Abbildung

$$\sup : X \ni \sup \{ d(X(t), X_0) \mid 0 \leq t \leq 1 \} \text{ stetig auf } D.$$

## ZUSAMMENFASSUNG

Der erste Teil der Arbeit befaßt sich mit dem Verhalten der Lösungen  $Y_n$  der stochastischen Differentialgleichungen

$$Y_n(t) = h_n(t-, X_n(t-), Y_n(t-)) dX_n(t) \quad \text{mit } Y_n(0) = Y_{n,0},$$

wobei die  $h_n$  Lipschitz-stetig und die  $X_n$  Semimartingale sind.

Unter schwachen Voraussetzungen an die  $X_n$  zeigt man, daß die  $Y_n$  nach Verteilung konvergieren.

Die Ergebnisse werden angewandt auf die Verteilungskonvergenz auf lokalkompakten Gruppen und ein Problem aus der Kontrolltheorie.

Im letzten Teil beweist man mit Hilfe Operator-theoretischer Methoden den Zentralen Grenzwertsatz für lokalkompakte, Lie-projektive Gruppen.

Literaturverzeichnis

- [1] Aranuo, A. & Giné, E. The central limit theorem for real and Banach valued random variables. Wiley (1980)
- [2] Billingsley, P. Convergence of probability measures. Wiley (1968)
- [3] Chow, Y.S. & Teicher, H. Probability theory. Springer (1978)
- [4] Emery, M. Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques. Application aux intégrales multiplicatives stochastiques. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 41 (1978) 241-262
- [5] Fürstenberg, H. & Kesten, H. Products of random matrices. Ann. Math. Stat. 31 (1960) 457-469
- [6] Grenander, U. Probability on algebraic structures. Wiley (1963)
- [7] Grenander, U. Stochastic Groups. Arkiv för Matematik 4 (1960/64)
- [8] Gihman I.I. & Skorohod, A.V. Controlled stochastic processes. Springer (1979)
- [9] Guess, H.A. An invariance principle for solutions to stochastic difference equations. J. Appl. Prob. 18 (1981) 548-553
- [10] Heyer, H. Probability measures on locally compact groups. Springer (1977)
- [11] Jacod, J. Calcul stochastique et problèmes des martingales. Lecture Notes in Mathematics Vol. 714. Springer (1979)
- [12] Jagers, P. Aspects of random measures and point processes. Advances in Probability and related Topics 3. Dekker (1974) 179-239
- [13] Kallenberg, O. Random measures. Academic Press (1976)
- [14] Le Page, E. Théorèmes limites pour les produits des matrices aléatoires. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 928 Springer (1982)
- [15] Loève, M. Probability theory. Van Nostrand (1977)
- [16] Woyczynski, W.A. Geometry and martingales in Banach spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 472. Springer (1975) 229-275
- [17] Woyczynski, W.A. Asymptotic behaviour of martingales in Banach spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 526. Springer (1975) 273-284

- [18] Siebert, E. Continuous hemigroups of probability measures on a Lie group. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 928. Springer (1982) 362-402
- [19] Gihman, I.I. & Skorohod, A.V. The theory of stochastic processes I. Springer (1974)
- [20] Parthasarathy, K.R. Probability measures on metric spaces. Academic Press (1967)
- [21] Métivier, M. Semimartingales. De Gruyter (1982)
- [22] Jacod, J., Kłopotowski, A. & Mémmin, J. Théorème de la limite centrale et convergence fonctionnelle. Annales de l'Institut H. Poincaré, Sec. B 28 (1982) 1-45
- [23] Berger, M.A. Central limit theorem for products of random matrices. Trans. Am. Math. Soc. 285 (1984) 777-803
- [24] Dvoretzky, A. Central limit theorem for dependent random variables. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. (1972) 513-535
- [25] Jacod, J. Processus à accroissements indépendantes: Une condition nécessaire et suffisante de convergence en loi. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 63 (1983) 109-136
- [26] Métivier, M. & Pellaumail, J. Stochastic integration. Academic Press (1980)
- [27] Schmidt, E.J.P.G. On multiplicative Lebesgue integration and families of evolution operators. Math. Scand. 29 (1971) 113-133
- [28] Siebert, E. Fourier analysis and limit theorems for convolution semigroups on a locally compact group. Advances in Math. 39 (1981) 111-154
- [29] Bartle, R.G. A general bilinear vector integral. Studia Mathematica 15 (1956) 337-352
- [30] Lépine, D. & Mémmin, J. Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielle. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 42 (1978) 175-204
- [31] Feinsilver, Ph. Processes with independent increments on a Lie group. Trans. Am. Math. Soc. 242 (1978) 73-121
- [32] Yosida, K. Functional analysis. Springer (1973)
- [33] Mc Leish, O.L. An extended martingale principle. Ann. Probability 2 (1974) 620-628
- [34] Stroock, D.W. & Varadhan, S.R.S. Multidimensional diffusion processes. Springer (1979)
- [35] Turelli, M. Random environments and stochastic calculus. Theoret. Popn. Biol. 12 (1977) 140-178

- [36] Kushner, H.J. On the weak convergence of interpolated Markov chains to a diffusion. *Ann. Probability* 2 (1974) 40-50
- [37] Janßen, R. Difference methods for stochastic differential equations with discontinuous coefficients. *Stochastics* 13 (1984) 199-212
- [38] Levikson B.Z. & Karlin S. Random temporal variation in selection intensities acting on infinite diploid populations: Diffusion method analysis. *Theoret. Popn. Biol.* 8 (1975) 292-300
- [39] Gillespie, J.H. A general model to account to enzym variation in natural populations. V The SAS - CFF model. *Theoret. Popn. Biol.* 14 (1978) 1-45
- [40] Aldous, D. Stopping times and tightness. *Ann. Probability* 6 (1978) p. 335-340
- [41] Christopeit, N. & Helmes K. On Benes' Bang-Bang control problem. *Appl. Math. Optim.* 9 (1982) 163-176
- [42] Christopeit, N. Discrete approximation of continuous time stochastic control system (*SIAM J. Control* 21 (1983) 17-40
- [43] Yamada, K. A Stability theorem for stochastic differential equations and application to stochastic control problems. *Stochastics* 13 (1984) 257-279
- [44] Yamada, K. Approximation of Markovian control systems by discrete control policies. *Proceedings of Intern. Symp. SDE Kyoto.* Kinokuniya-Press (1976) 463-491
- [45] Siebert, E. Über die Erzeugung von Faltungshalbgruppen auf beliebigen lokalkompakten Gruppen. *Math. Z.* 131 (1973) 313-333
- [46] Skorohod, A.V. Operator stochastic differential equations and stochastic semigroups. *Russian Math. Surveys* 37 (1982) 177-204
- [47] Skorohod, A.V. Products of independent random operators. *Russian Math. Surveys* 38 (1983) 291-318
- [48] Yoshihara, Ken-ichi, A weak convergence theorem for functionals of sums of independent random variables. *Stochastic Proc. Appl.* 12 (1982) 293-299
- [49] Jacod, J. & Mémmin, J. Weak and strong solutions of stochastic differential equations: Existence and stability. *Lecture Notes in Mathematics Vol. 851, Springer* (1980) 169-212
- [50] Jacod, J., Memmin, J. & Métivier, M. On tightness and stopping times. *Stochastic Proc. Appl.* 14 (1983) 109-146
- [51] Wacker, U. Grenzwertsätze für nichtadditive, schwach abhängige Prozesse. *Dissertation, Göttingen* (1983)





## Lebenslauf

Name: Ino H u c k e

geboren am: 1. März 1953

in: Winnigen

Familienstand: verheiratet

Schulen:

1959 - 1960 Grundschule in Wilsleben

1960 - 1961 Grundschule in Neuenhaßlau

1961 - 1963 Grundschule in Idstein

1963 - 1965 Realschule in Idstein

1965 - 1972 Gymnasium in Idstein

Abschluß: Abitur

Studium

der: Mathematik

in: Mainz

Beginn: 1972

Abschluß: 1982

als: Diplom-Mathematiker









